Перевод с английского статьи “An improved parametric model for hysteresis loop approximation” (R. V. Lapshin, Review of Scientific Instruments, volume 91, issue 6, number 065106, 31 pages, 2020, DOI: 10.1063/5.0012931; свободный доступ на веб-сайтах www.lapshin.fast-page.org/publications.htm и www.niifp.ru/staff/lapshin/#articles)

Улучшенная параметрическая модель для аппроксимации петли гистерезиса

Р. В. Лапшин[1, 2]

[1]*НИИ Физических проблем им. Ф. В. Лукина, Лаборатория твердотельной нанотехнологии, Россия, 124460, г. Москва, г. Зеленоград*

[2]*Московский институт электронной техники, Кафедра интегральной электроники и микросистем, Россия, 124498, г. Москва, г. Зеленоград*

Электронная почта: rlapshin@gmail.com

В существующую аналитическую модель петли гистерезиса, заданную в параметрическом виде, внесён ряд улучшений. В частности, в модель введены три фазовых сдвига, которые позволяют плавно наклонять петлю гистерезиса в точке расщепления на требуемый угол, а также плавно изменять кривизну петли. В результате погрешность аппроксимации петли гистерезиса улучшенной моделью не превышает 1%, что в несколько раз меньше погрешности аппроксимации петли существующей моделью. Улучшенная модель способна аппроксимировать большинство из известных типов статических симметричных петель гистерезиса, встречающихся в практике физических измерений. Модель позволяет строить гладкие, кусочно-линейные, гибридные, частные, зеркально-отражённые, обратные, реверсивные, двойные и тройные петли. Одним из возможных применений разработанной модели является линеаризации пьезосканера зондового микроскопа. Улучшенная модель может оказаться полезной при решении задач имитационного моделирования научных приборов, включающих в себя элементы с гистерезисом.

Ключевые слова: гистерезис, петля гистерезиса, параметрический вид, кусочно-линейная петля гистерезиса, люфт, неидеальное реле, двойная петля гистерезиса, тройная петля гистерезиса, площадь петли гистерезиса, линеаризация пьезосканера, сканирующий зондовый микроскоп, СЗМ, АСМ, СТМ, имитационное моделирование

I. ВВЕДЕНИЕ

Явление гистерезиса широко распространено в природе, оно часто встречается во многих областях науки и техники, включая приборы, используемые в научных исследованиях.[1, 2, 3] Существует ряд довольно сложных аналитических моделей, описывающих указанное явление.[4] Одной из простых моделей является аналитическая модель, предложенная в работе 1. В данной модели семейство петель гистерезиса описывается следующими параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= a\cos^m \alpha + b_x \sin^n \alpha, \\ y(\alpha) &= b_y \sin \alpha, \end{aligned} \qquad (1)$$

где α – действительный параметр (α=0…2π); a – x-координата точки расщепления (см.

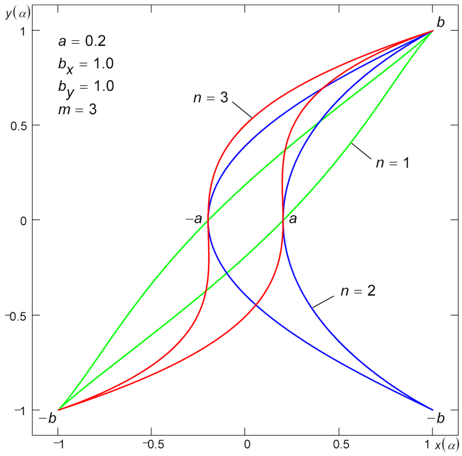


Рис. 1. Петли гистерезиса типа Лист (n=1), Месяц (Бумеранг, n=2) и Классическая (n=3). Площадь всех трёх петель одинаковая.

Рис. 1); b_x, b_y – координаты точки насыщения; m – положительное целое нечётное число (m=1, 3, 5, …), определяющее кривизну петли гистерезиса; n – положительное целое число, определяющее тип петли гистерезиса и её кривизну. При n=1 возникает петля типа Лист, при n=2, 4, 6, … – петля типа Месяц (Бумеранг), при n=3, 5, 7, … – петля типа Классическая. При возрастании параметра α движение по петле происходит в направлении против часовой стрелки, при убывании – по часовой стрелке. Начало петли (α=0) и конец петли (α=2π) находятся в точке расщепления a.

Главной отличительной чертой модели (1) является её простота. Модель интуитивно понятна, она позволяет быстро создавать петли гистерезиса требуемого типа и легко определять ключевые параметры этих петель a, b_x, b_y, m, n. Для большинства практических задач точности аппроксимации модели (1) 1.5-6%[1] вполне достаточно. Однако встречаются случаи, когда требуется более высокая точность. Предлагаемая в статье улучшенная модель[5] способна аппроксимировать петли гистерезиса с погрешностью 1% и менее.

Модель (1) охватывает большую часть известных типов статических симметричных гладких петель гистерезиса. Улучшенная модель позволяет с более высокой точностью контролировать наклон и кривизну гладких петель (см. секцию II.A.2). Помимо гладких петель улучшенная модель позволяет строить различные кусочно-линейные петли (см. секцию II.B), а также гибридные петли (см. секцию II.B.1.b), в которых прямолинейные участки сочетаются с криволинейными. Кроме того, с помощью улучшенной модели из гладких, кусочно-линейных и гибридных петель, а также из их сочетаний можно создавать прочерчиваемые непрерывно двойные (см. секцию II.C) и тройные петли (см. секцию II.D), как самопересекающиеся так и самонепересекающиеся. В разделе II.E даны формулы, по которым можно определять площади петель гистерезиса. В целом в статье представлен общий подход, пригодный для аппроксимации большого числа самых разнообразных петель гистерезиса.

Для облегчения построения, анализа и идентификации рассматриваемых петель гистерезиса к статье прилагается дополнительный материал в виде рабочих листов Маткада® (MathSoft, USA).[6] Чтобы избежать загромождения статьи, в ней не приводится вывод некоторых формул. Подробный вывод этих формул можно найти в дополнительном материале.

II. ОПИСАНИЕ УЛУЧШЕННОЙ МОДЕЛИ

A. Гладкие петли гистерезиса

1. Дополнительные представления петли гистерезиса

a. Представление в виде суммы нерасщеплённой петли и кривой расщепления

Петлю гистерезиса (1) всегда можно представить в виде суммы двух параметрических кривых

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= x_1(\alpha) + x_2(\alpha), \\ y(\alpha) &= y_1(\alpha) + y_2(\alpha), \end{aligned} \tag{2}$$

где $x_1(\alpha)=b_x \sin^n\alpha$, $y_1(\alpha)=b_y \sin\alpha$ – нерасщеплённая петля; $x_2(\alpha)=a\cos^m\alpha$, $y_2(\alpha)=0$ – кривая расщепления. Данное представление удобно использовать при рассмотрении преобразований, изменяющих наклон и/или кривизну петли гистерезиса (1): вначале наклонению/искривлению подвергается нерасщеплённая петля, после чего полученный результат расщепляется простым добавлением кривой расщепления.[6] Кроме этого, изменяя/добавляя направление действия кривой расщепления можно создавать двойные (см. раздел II.C.3) и тройные петли гистерезиса (см. раздел II.D.3).

b. Представление в виде частотного спектра

Используя формулу Муавра, порождающую функцию $x(\alpha)$ в модели (1) можно также представить в виде суммы косинусов и синусов с кратными частотами (частотного спектра)

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= \frac{a}{2^{m-1}} \sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} C_m^k \cos((m-2k)\alpha) + \frac{b_x}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}+k} C_n^k \sin((n-2k)\alpha), \\ y(\alpha) &= b_y \sin\alpha, \end{aligned} \tag{3}$$

где C_l^k – биномиальный коэффициент (k, l – целые положительные числа); $C_l^k = l!/[k!(l-k)!]$, если $0 \le k \le l$, иначе $C_l^k=0$ (ниже в (6), (25) $C_l^k=0$, если k – действительное число). Уравнения (3) справедливы для нечётных n, уравнения для чётных n приведены в дополнительном материале. В соответствие с (3) при, например, $m=n=3$ уравнения, описывающие петлю гистерезиса Классическая (см. Рис. 1), выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= \frac{a}{4}[3\cos\alpha + \cos(3\alpha)] + \frac{b_x}{4}[3\sin\alpha - \sin(3\alpha)], \\ y(\alpha) &= b_y \sin\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Легко видеть, что запись порождающей функции $x(\alpha)$ в виде (3) фактически является разложением $x(\alpha)$ в ряд Фурье по нечётным гармоникам

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{l} (A_k \cos(k\alpha) + B_k \sin(k\alpha)), \\ y(\alpha) &= b_y \sin\alpha, \end{aligned} \tag{5}$$

где коэффициенты Фурье A_k, B_k определяются по алгебраическим формулам

$$A_k = \frac{a}{2^{m-1}} C_m^{\frac{m-k}{2}},$$
$$B_k = (-1)^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \frac{b_x}{2^{n-1}} C_n^{\frac{n-k}{2}}. \tag{6}$$

Амплитуда постоянной составляющей A_0 (k=0) и амплитуды A_k и B_k всех чётных гармоник (k=2, 4, 6, …) в (5) равны нулю. Величина l задаётся равной наибольшей из степеней m и n. Функция floor в выражении для B_k в (6) – необязательна, она используется только для того, чтобы избежать появления комплексных чисел при чётных k. В качестве примера, коэффициенты Фурье порождающей функции $x(\alpha)$ петли Классическая (m=n=3), изображённой на Рис. 1, выглядят следующим образом: A_k=(0, 3a/4, 0, a/4), B_k=(0, 3b_x/4, 0, -b_x/4).

Располагая коэффициентами Фурье A_k, B_k (6), порождающую функцию $x(\alpha)$ можно также представить в виде

$$x(\alpha) = \sum_{k=1}^{l} Am_k \cos(k\alpha - \varphi_k), \tag{7}$$

где амплитуды Am_k и фазы φ_k гармоник определяются по формулам

$$Am_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2^{m-1}} C_m^{\frac{m-k}{2}}\right)^2 + \left(\frac{b_x}{2^{n-1}} C_n^{\frac{n-k}{2}}\right)^2},$$
$$\tan\varphi_k = \frac{B_k}{A_k} = (-1)^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} 2^{m-n} \frac{C_n^{\frac{n-k}{2}} b_x}{C_m^{\frac{m-k}{2}} a}. \tag{8}$$

Например, петля гистерезиса Классическая (m=n=3), показанная на Рис. 1, имеет амплитуды Am_k=(0, $3\sqrt{a^2 + b_x^2}/4$, 0, $\sqrt{a^2 + b_x^2}/4$) и фазы $\tan\varphi_k$=(0, b_x/a, 0, -b_x/a).

Порождающую функцию $x(\alpha)$ также можно представить в экспоненциальном виде

$$x(\alpha) = \sum_{k=-l}^{l} C_k e^{ik\alpha}, \tag{9}$$

где i – мнимая единица, а комплексный коэффициент Фурье C_k определяется следующим образом

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(A_k - iB_k), \ k = 1, 3, 5, \ldots, \\ \frac{1}{2}(A_k + iB_k), \ k = -1, -3, -5, \ldots, \\ 0, \ k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots. \end{cases} \tag{10}$$

Располагая комплексным коэффициентом Фурье C_k, порождающую функцию $x(\alpha)$ также можно представить в виде

$$x(\alpha)=\sum_{k=-l}^{l} Am_k e^{i(k\alpha-\varphi_k)}=\sum_{k=-l}^{l} Am_k \cos(k\alpha-\varphi_k), \tag{11}$$

где амплитуды Am_k и фазы φ_k гармоник определяются по формулам

$$\begin{aligned} Am_k &= \sqrt{\mathrm{Re}^2(C_k)+\mathrm{Im}^2(C_k)},\\ \varphi_k &= -\mathrm{Arg}(C_k)=-\arctan\frac{\mathrm{Im}(C_k)}{\mathrm{Re}(C_k)}, \end{aligned} \tag{12}$$

где Re, Im и Arg – реальная часть, мнимая часть и аргумент комплексного числа, соответственно.

Представление порождающей функции $x(\alpha)$ в виде частотного спектра (3), (5), (7) и (11) позволяет синтезировать петли гистерезиса требуемой формы, наклона и кривизны путём изменения амплитуд и фаз гармонических составляющих и путём добавления/исключения гармонических составляющих с определёнными значениями амплитуд и фаз.[6] Данный подход делает возможным построение гладких петель гистерезиса практически любой формы.

На Рис. 2 показан пример синтеза Классической петли гистерезиса сложной формы[7] из гармонических составляющих. Порождающая функция петли $x(\alpha)$ образована путём суммирования первых четырёх нечётных гармоник (m=7). Петля гистерезиса проведена точно через 14 предварительно заданных точек, шесть из которых – это ключевые точки петли $\pm a$, $\pm a_y$, $\pm b$ (где a_y – вертикальное расщепление, см. разделы II.C.3, II.D.3). Амплитуды и фазы гармонических составляющих определены численно в ходе решения системы нелинейных уравнений.[6] Площадь петли зависит только от амплитуды и фазы первой гармоники, остальные гармоники на площадь петли влияние не оказывают (см. раздел II.E.1).

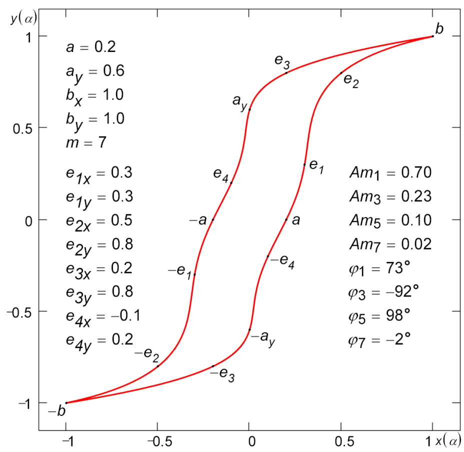


Рис. 2. Петля гистерезиса сложной формы типа Классическая, порождающая функция $x(\alpha)$ которой образована суммированием первых четырёх нечётных гармоник. Петля проведена точно через 14 предварительно заданных точек. Площадь петли зависит от амплитуды и фазы только первой гармоники.

2. *Использование фазовых сдвигов*

Одним из основных изменений, внесённых в ранее предложенную модель петли гистерезиса (1), является введение фазовых сдвигов $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= \hat{a}\cos^m(\alpha+\Delta\alpha_1)+\hat{b}_x\sin^n(\alpha+\Delta\alpha_2),\\ y(\alpha) &= b_y\sin(\alpha+\Delta\alpha_3), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\hat{a}$, $\hat{b}_x$ – скорректированные параметры для a, b_x, соответственно. Рассмотрим вначале действие каждого из трёх фазовых сдвигов $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ в отдельности.

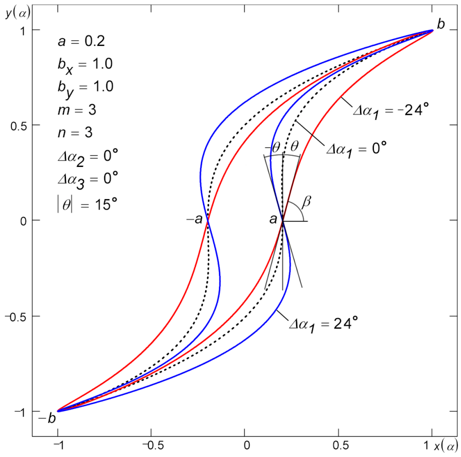


Рис. 3. Наклонение петли гистерезиса типа Классическая с помощью фазового сдвига $\Delta\alpha_1$. Наклонение в точке расщепления *a* на угол $\pm\theta$ обеспечивается сдвигом на $\mp\Delta\alpha_1$. Наклонение петли вызывает рост её площади. Площадь петли с положительным наклоном равна площади петли с отрицательным наклоном.

а. Наклон петли с помощью фазового сдвига $\Delta\alpha_1$

Фазовый сдвиг $\Delta\alpha_1$ позволяет плавно наклонять петлю гистерезиса, изменяя угол наклона $\beta=\pi/2-\theta$ касательной к петле в точке расщепления *a* (см. Рис. 3). В ранее предложенной модели наклон петли осуществлялся путём поворота системы координат на угол θ и предыскажения параметров петли *a*, b_x, b_y путём их поворота в противоположном направлении.[1] Более точные формулы наклонения петли поворотом, позволяющие исключить до этого имевшее место небольшое смещение точки расщепления от заданного положения, выглядят следующим образом ($\Delta\alpha_1=\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=0$)[6]

$$\begin{aligned}\bar{x}(\alpha) &= x(\alpha)+\sin\theta\left(b_x\sin\theta+b_y\cos\theta\right)\left(\sin\alpha-\sin^n\alpha\right),\\ \bar{y}(\alpha) &= y(\alpha)+\sin\theta\left(b_x\cos\theta-b_y\sin\theta\right)\left(\sin\alpha-\sin^n\alpha\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Из преобразований (14) видно, что наклонённая петля представляет собой результат сложения исходной петли с некоторой кривой, обеспечивающей наклонение исходной петли (см. раздел II.A.4).

Поскольку внесение фазового сдвига $\Delta\alpha_1$ ведёт к изменению координат точек расщепления *a* и насыщения b_x, то требуется коррекция координат этих точек. В улучшенной модели (13) скорректированные параметры $\hat{a}$, $\hat{b}_x$ находятся из следующей простой системы уравнений, составленной для точки расщепления $\alpha=0$ и точки насыщения $\alpha=\pi/2$ ($\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=0$)

$$\begin{aligned}&\hat{a}\cos^m(0+\Delta\alpha_1)+\hat{b}_x\sin^n 0=a,\\ &\hat{a}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}+\Delta\alpha_1\right)+\hat{b}_x\sin^n\frac{\pi}{2}=b_x,\end{aligned} \tag{15}$$

откуда легко определить

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{a}{\cos^m\Delta\alpha_1},\\ \hat{b}_x &= b_x+a\tan^m\Delta\alpha_1.\end{aligned} \tag{16}$$

При $m=1$ петли типа Лист ($n=1$) не зависят от фазового сдвига $\Delta\alpha_1$. Фазовый сдвиг $\Delta\alpha_1$ требуемый для наклонения петли в точке расщепления *a* ($\alpha=0$) на заданный угол θ рассчитывается по формуле[6]

$$\Delta\alpha_1 = -\arctan\frac{b_y \tan\theta}{ma}. \qquad (17)$$

Нерасщеплённые петли (a=0) нельзя наклонить с помощью фазового сдвига $\Delta\alpha_1$.

b. Изменение кривизны петли с помощью фазового сдвига $\Delta\alpha_2$

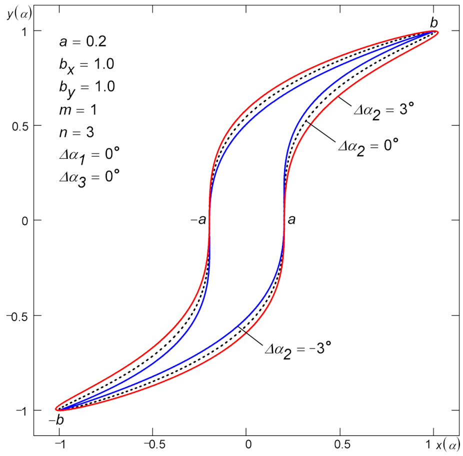


Рис. 4. Плавное изменение кривизны петли гистерезиса с помощью фазового сдвига $\Delta\alpha_2$. Площадь петли возрастает при увеличении фазового сдвига $\Delta\alpha_2$.

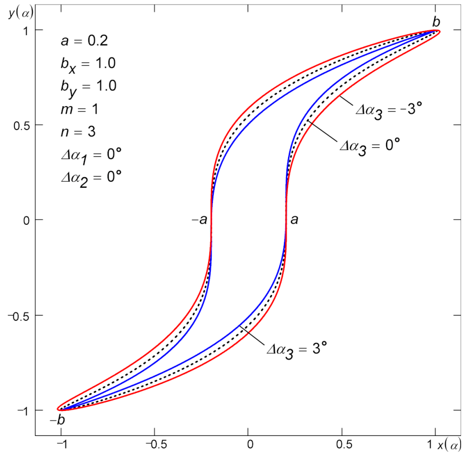


Рис. 5. Плавное изменение кривизны петли гистерезиса с помощью фазового сдвига $\Delta\alpha_3$. Площадь петли уменьшается при увеличении фазового сдвига $\Delta\alpha_3$.

Фазовый сдвиг $\Delta\alpha_2$ позволяет изменять кривизну петли гистерезиса (см. Рис. 4). В отличие от параметра m фазовый сдвиг $\Delta\alpha_2$ обеспечивает плавное изменение кривизны петли. Также как и в случае фазового сдвига $\Delta\alpha_1$, при фазовом сдвиге $\Delta\alpha_2$ необходимо определить скорректированные координаты $\hat{a}$, $\hat{b}_x$ точек расщепления и насыщения, соответственно. Для этого следует решить систему уравнений, составленную для точки расщепления α=0 и точки насыщения α=π/2 ($\Delta\alpha_1$=$\Delta\alpha_3$=0)

$$\begin{aligned} &\hat{a}\cos^m 0 + \hat{b}_x \sin^n(0+\Delta\alpha_2) = a, \\ &\hat{a}\cos^m \frac{\pi}{2} + \hat{b}_x \sin^n\left(\frac{\pi}{2}+\Delta\alpha_2\right) = b_x, \end{aligned} \qquad (18)$$

откуда

$$\begin{aligned} &\hat{a} = a - b_x \tan^n \Delta\alpha_2, \\ &\hat{b}_x = \frac{b_x}{\cos^n \Delta\alpha_2}. \end{aligned} \qquad (19)$$

При m=1 петли типа Лист (n=1) не зависят от фазового сдвига $\Delta\alpha_2$.

c. Изменение кривизны петли с помощью фазового сдвига $\Delta\alpha_3$

Фазовый сдвиг $\Delta\alpha_3$, также как и $\Delta\alpha_2$, позволяет плавно изменять кривизну петли гистерезиса (см. Рис. 5). Составляя уравнения для точки расщепления α=0 и точки насыщения α=π/2 аналогично тому, как это делалось выше, получаем ($\Delta\alpha_1$=$\Delta\alpha_2$=0)

$$\begin{aligned} &\hat{a}\cos^m(0-\Delta\alpha_3) + \hat{b}_x \sin^n(0-\Delta\alpha_3) = a, \\ &\hat{a}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-\Delta\alpha_3\right) + \hat{b}_x \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\Delta\alpha_3\right) = b_x, \end{aligned} \qquad (20)$$

откуда находим скорректированные параметры

$$\hat{a} = \frac{a\cos^n \Delta\alpha_3 + b_x \sin^n \Delta\alpha_3}{\sin^{m+n} \Delta\alpha_3 + \cos^{m+n} \Delta\alpha_3},$$
$$\hat{b}_x = \frac{b_x \cos^m \Delta\alpha_3 - a\sin^m \Delta\alpha_3}{\sin^{m+n} \Delta\alpha_3 + \cos^{m+n} \Delta\alpha_3}. \tag{21}$$

При m=1 форма петель типа Лист (n=1) не зависит от фазового сдвига $\Delta\alpha_3$.

Действие фазового сдвига $\Delta\alpha_3=\Delta\alpha$ противоположно действию фазового сдвига $\Delta\alpha_2=\Delta\alpha$ (сравни Рис. 5 с Рис. 4). При этом петля, построенная при $\Delta\alpha_2=\Delta\alpha$, немного отличается от петли, построенной при $\Delta\alpha_3=-\Delta\alpha$. Различие возрастает по мере увеличения $|\Delta\alpha|$. Фазовый сдвиг $\Delta\alpha_3$ вызывает смещение параметра α на величину $\Delta\alpha_3$. В результате в точке расщепления a параметр α равен $-\Delta\alpha_3$, а в точке насыщения b – $\pi/2-\Delta\alpha_3$.

d. Одновременное использование нескольких фазовых сдвигов

В общем случае, когда одновременно задействованы все три фазовых сдвига $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$ и $\Delta\alpha_3$, система уравнений, составленная для точки расщепления α=0 и точки насыщения $\alpha=\pi/2$, выглядит следующим образом

$$\hat{a}\cos^m(0+\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)+\hat{b}_x\sin^n(0+\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)=a,$$
$$\hat{a}\cos^m\left(\frac{\pi}{2}+\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3\right)+\hat{b}_x\sin^n\left(\frac{\pi}{2}+\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3\right)=b_x. \tag{22}$$

Решая систему (22), находим искомые скорректированные параметры

$$\hat{a} = \frac{a\cos^n(\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)-b_x\sin^n(\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)}{\sin^m(\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)\sin^n(\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)+\cos^m(\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)\cos^n(\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)},$$
$$\hat{b}_x = \frac{a\sin^m(\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)+b_x\cos^m(\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)}{\sin^m(\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)\sin^n(\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)+\cos^m(\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)\cos^n(\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)}. \tag{23}$$

Подставляя полученные параметры $\hat{a}$, $\hat{b}_x$ в (13), легко показать, что при m=1 петли типа Лист (n=1) не зависят от фазовых сдвигов $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, а форма этих петель не зависит от фазового сдвига $\Delta\alpha_3$. Формулы (16), (19), (21) являются частными случаями формул (23).

Хотя действие фазового сдвига $\Delta\alpha_3$ противоположно действию фазового сдвига $\Delta\alpha_2$, полной нейтрализации одного сдвига другим при их совместном использовании $\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=\Delta\alpha$ ($\Delta\alpha_1$=0) не происходит. При задании равных друг другу фазовых сдвигов $\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=\Delta\alpha$ их совместное действие противоположно действию фазового сдвига $\Delta\alpha_1=\Delta\alpha$. Поэтому для наклона петли гистерезиса в точке расщепления вместо использования фазового сдвига $\Delta\alpha_1=\Delta\alpha$ можно задавать $\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=-\Delta\alpha$. Поскольку действие фазовых сдвигов $\Delta\alpha_2$ и $\Delta\alpha_3=-\Delta\alpha_2$ схожи, то при практическом применении модели (13) можно ограничиться использованием только двух фазовых сдвигов: $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\alpha_2$ (см. раздел III) или $\Delta\alpha_1$ и $\Delta\alpha_3$. Формулы для определения скорректированных параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}_x$ при использовании фазовых сдвигов $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$ получаются из формул (23) при подстановке $\Delta\alpha_3$=0; при использовании фазовых сдвигов $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_3$ – при подстановке $\Delta\alpha_2$=0.

Заметим, что при $\Delta\alpha_1=\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=\Delta\alpha\neq 0$, где $\Delta\alpha$ – произвольное действительное число, скорректированные параметры $\hat{a}$, $\hat{b}_x$ улучшенной модели (13) вырождаются в параметры a, b_x исходной модели (1), соответственно. Таким образом, в рассматриваемом случае петли гистерезиса, построенные согласно модели (13), по форме совпадают с петлями модели (1), но только их параметр α оказывается сдвинутым на величину $\Delta\alpha$. Вывод о вырождении модели (13) в модель (1) также вытекает из следующего рассуждения. Поскольку одновременное действие равных друг другу фазовых сдвигов $\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=\Delta\alpha$ противоположно действию фазового сдвига $\Delta\alpha_1=\Delta\alpha$, то при одновременном задании трёх одинаковых фазовых сдвигов $\Delta\alpha_1=\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=\Delta\alpha$ должна возникнуть петля (1).

Также как и исходную модель (1) улучшенную модель (13) можно представить в виде суммы гармонических колебаний

$$\begin{aligned}
x(\alpha) &= \frac{\hat{a}}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} C_m^k \cos\big((m-2k)(\alpha+\Delta\alpha_1)\big) + \frac{\hat{b}_x}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}+k} C_n^k \sin\big((n-2k)(\alpha+\Delta\alpha_2)\big),\\
y(\alpha) &= b_y \sin(\alpha+\Delta\alpha_3).
\end{aligned} \tag{24}$$

Из представления (24) можно также напрямую вычленить коэффициенты Фурье A_k, B_k[6]

$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{\hat{a}}{2^{m-1}} C_m^{\frac{m-k}{2}} \cos(k\Delta\alpha_1) + (-1)^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \frac{\hat{b}_x}{2^{n-1}} C_n^{\frac{n-k}{2}} \sin(k\Delta\alpha_2),\\
B_k &= \frac{-\hat{a}}{2^{m-1}} C_m^{\frac{m-k}{2}} \sin(k\Delta\alpha_1) + (-1)^{\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor} \frac{\hat{b}_x}{2^{n-1}} C_n^{\frac{n-k}{2}} \cos(k\Delta\alpha_2),
\end{aligned} \tag{25}$$

по которым легко определяются амплитуды Am_k и фазы φ_k гармоник порождающей функции $x(\alpha)$ (см. формулы (8), (12)).

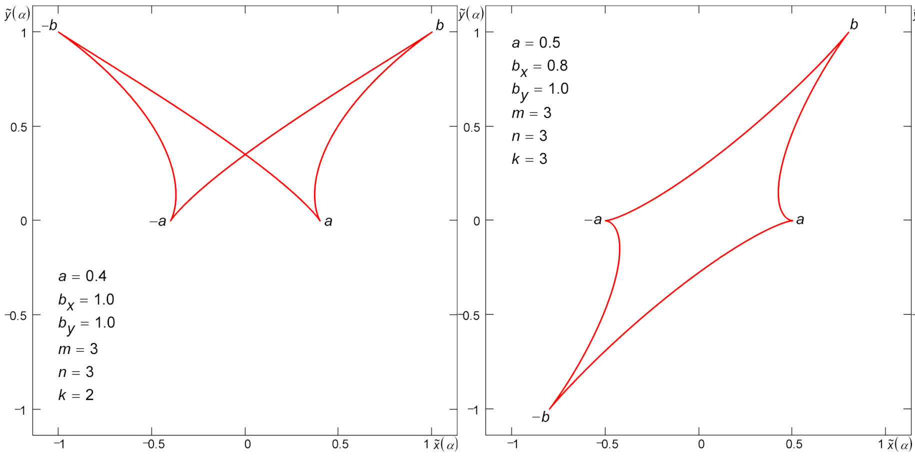
Согласно определения (13), для получения на выходе $y(\alpha)$ гистерезисного элемента гармонического сигнала на его вход нужно подать сигнал вида $x(\alpha)=\hat{a}\cos^m(\alpha+\Delta\alpha_1)+\hat{b}_x\sin^n(\alpha+\Delta\alpha_2)$ (или в соответствии со спектральным представлением (24) сумму гармоник (7)). Требуемый начальный сдвиг фазы $\Delta\alpha_3$ гармонического сигнала получается путём задания соответствующих скорректированных параметров $\hat{a}$, $\hat{b}_x$, вычисляемых по формулам (23). Из сказанного следует, что петля гистерезиса (13) обладает фильтрующей способностью.

3. Петли гистерезиса типа Летучая Мышь и Астро

В работе 1 петлю гистерезиса типа Летучая Мышь (Бабочка) получали, взяв порождающую функцию $y(\alpha)$ по модулю: $\tilde{y}(\alpha)=\left|b_y \sin\alpha\right|$. Подобного типа петлю также можно получить, если в $y(\alpha)$ вместо модуля возвести $\sin\alpha$ в чётную степень k=2, 4, …:

$$\tilde{x}(\alpha) = x(\alpha),$$
$$\tilde{y}(\alpha) = b_y \sin^k \alpha. \tag{26}$$

На Рис. 6а изображена петля гистерезиса типа Летучая Мышь при k=2. При нечётных



(а) (б)

Рис. 6. Петля гистерезиса (а) Летучая Мышь (Бабочка), (б) Астро.

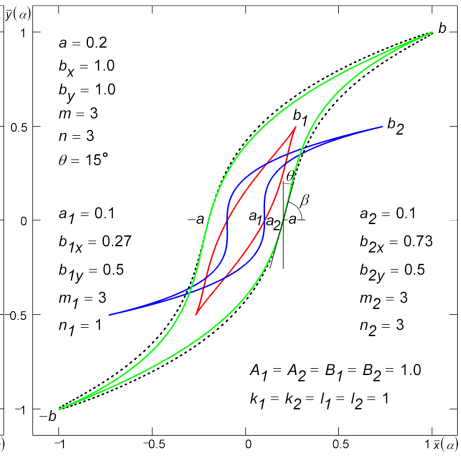


Рис. 7. Наклонная Классическая петля (зелёная) – результат сложения двух петель гистерезиса – петли 1 Лист (красная) с петлёй 2 Классическая (синяя). Для сравнения пунктирной линией показана петля Классическая, наклонённая в точке расщепления a на такой же угол θ=15° с помощью фазового сдвига $\Delta\alpha_1$.

степенях k=3, 5, … получаются петли типа Астро.[8, 9] На Рис. 6б изображена петля гистерезиса типа Астро при k=3.

4. Арифметические действия над петлями гистерезиса

Петли гистерезиса (1)-(5), (7), (9), (11), (13) и их компоненты можно складывать, вычитать, умножать на число, возводить в степень, а также использовать в качестве аргументов некоторых функций

$$\bar{x}(\alpha) = \sum_i A_i x_i^{k_i}(\alpha),$$
$$\bar{y}(\alpha) = \sum_i B_i y_i^{l_i}(\alpha), \tag{27}$$

где A_i, B_i – действительные коэффициенты; k_i, l_i – положительные целочисленные степени, обычно нечётные. Определённые над петлями арифметические операции (27) позволяют изменять форму, наклон и кривизну петель гистерезиса, а также строить двойные петли (см. раздел II.C.4). Допустимо складывать петли разных типов.

На Рис. 7 показан пример сложения двух петель гистерезиса разных типов – петли Лист и петли Классическая (a_2=a-a_1, b_{2x}=b_x-b_{1x}, b_{2y}=b_y-b_{1y}). Параметры результирующей петли a, b_x, b_y, m, θ даны в левом верхнем углу рисунка. Следует обратить внимание на то, что посредством сложения с петлёй типа Лист Классические петли можно наклонять в точке расщепления a на угол θ (β=π/2-θ – угол наклона касательной в точке a). Параметр петли b_{1x} (или b_{1y}, b_{2y}, b_y) находится с учётом заданного угла θ по формуле[6]

$$b_{1x} = (b_{1y} + b_{2y})\tan\theta = b_y \tan\theta. \tag{28}$$

В общем случае любую петлю гистерезиса можно разложить на бесконечное множество

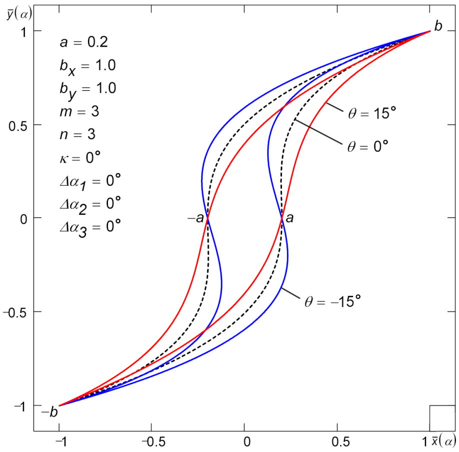
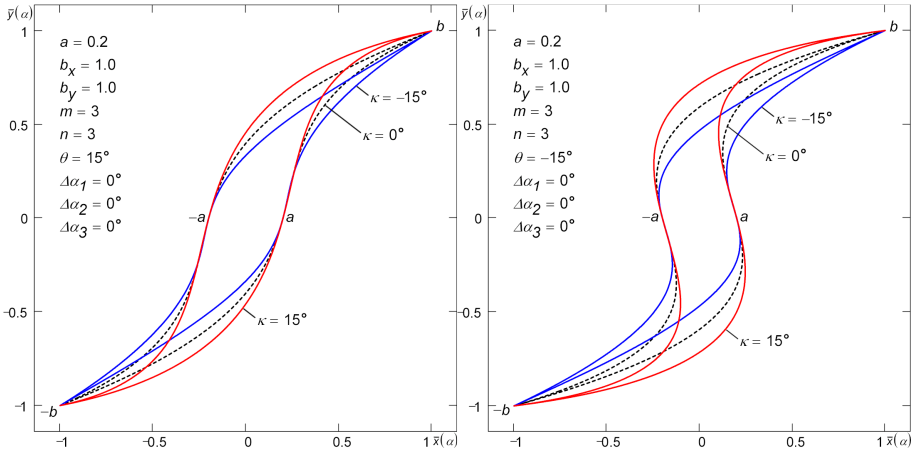


Рис. 8 Наклонение петли гистерезиса Классическая путём перекоса системы координат на угол θ в направлении оси x. Площадь всех петель одна и та же при любых углах перекоса θ.



(а) (б)

Рис. 9. Изменение кривизны петли гистерезиса Классическая путём перекоса системы координат на угол κ в направлении оси y. Наклонение петли в точке расщепления на угол (а) θ=15°, (б) θ=-15°. Петли, наклонённые на любой угол θ, у которых все остальные параметры одни и те же, имеют одинаковые площади.

петель, поскольку указанным выше способом каждую петлю из пары складываемых петель всегда можно представить в виде некоторой пары каких-то других петель.

В дополнительном материале показано, что действие следующего преобразования ($\Delta\alpha_1$=$\Delta\alpha_2$=$\Delta\alpha_3$=0)

$$\begin{aligned}\bar{x}(\alpha) &= x(\alpha) + b_y \tan\theta\left(\sin\alpha - \sin^n\alpha\right),\\ \bar{y}(\alpha) &= y(\alpha),\end{aligned} \tag{29}$$

построенного на перекосе системы координат на угол θ в направлении оси x, эквивалентно наклонению петли посредством сложения с петлёй Лист (см. Рис. 7). На Рис. 8 изображены Классические петли гистерезиса, наклонённые в точке расщепления согласно преобразованию (29).

Дополнительный перекос системы координат на угол κ в направлении оси y[6]

$$\begin{aligned}\bar{x}(\alpha) &= x(\alpha) + \tan\theta\left(b_x \tan\kappa + b_y\right)\left(\sin\alpha - \sin^n\alpha\right),\\ \bar{y}(\alpha) &= y(\alpha) + b_x \tan\kappa\left(\sin\alpha - \sin^n\alpha\right)\end{aligned} \tag{30}$$

позволяет плавно изменять кривизну петли. На Рис. 9 показаны построенные с помощью преобразований (30) наклонные Классические петли с разными кривизнами. Преобразования (29) являются частным случаем преобразований (30).

B. Кусочно-линейные и гибридные петли гистерезиса

Простейший способ построения кусочно-линейных петель в рамках рассматриваемой модели заключается в следующем. Период T=2π изменения параметра α делится на нужное количество k интервалов, где k – целое чётное число (k≥4). Подставляя в формулу (13) вместо непрерывных значений α, значения α, изменяющиеся с шагом T/k, получаем x, y-координаты точек кусочно-линейной петли гистерезиса, которые соединяем отрезками прямых. На Рис. 10 дан пример кусочно-линейных петель трёх типов Лист, Месяц (Бумеранг) и Классическая, построенных для k=12 (шестисегментная петля, k/2=6).

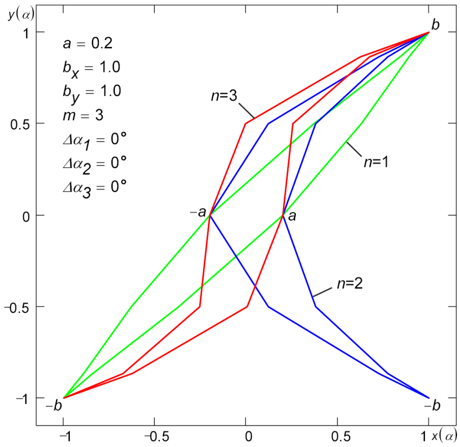


Рис. 10. Кусочно-линейные петли гистерезиса типа Лист (n=1), Месяц (Бумеранг, n=2) и Классическая (n=3). Число интервалов разбиения k=12 (шестисегментная петля). Площади петель примерно одинаковые.

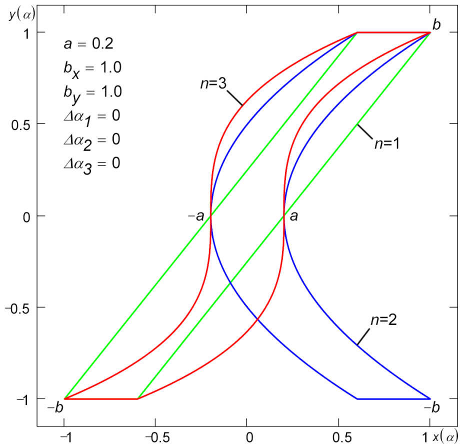


Рис. 11. Кусочно-линейная петля гистерезиса Лист (Люфт без Усов, n=1), гибридный Месяц (гибридный Бумеранг, n=2) и гибридная Классическая (n=3), построенные на трапецеидальных импульсах. Площадь всех трёх петель одинаковая.

Другие способы получения кусочно-линейных петель гистерезиса заключаются в замене функций синуса и косинуса в порождающих функциях $x(\alpha)$ и $y(\alpha)$ модели (13) на трапецеидальные, треугольные и прямоугольные импульсы единичной амплитуды и их сочетания.

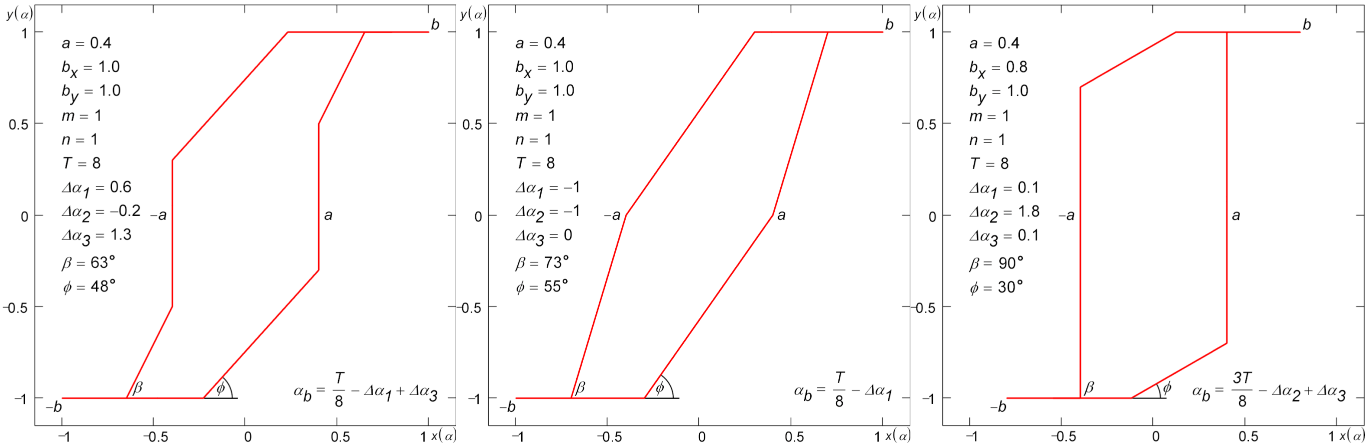
1. Петли на трапецеидальных импульсах

Заменяя синусы и косинусы в порождающих функциях $x(\alpha)$ и $y(\alpha)$ модели (1) на трапецеидальные импульсы единичной амплитуды $\mathrm{trp_s}$ и $\mathrm{trp_c}$, соответственно, получаем уравнения кусочно-линейных петель гистерезиса, построенные на трапецеидальных импульсах

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= a\,\mathrm{trp}_\mathrm{c}^m\,\alpha + (b_x - a)\,\mathrm{trp}_\mathrm{s}^n\,\alpha, \\ y(\alpha) &= b_y\,\mathrm{trp_s}\,\alpha, \end{aligned} \tag{31}$$

где $\mathrm{trp_c}(\alpha)=\mathrm{trp_s}(\alpha+T/4)$; T – период импульсов. Выражения, с помощью которых задаются трапецеидальные импульсы trp, приведены в работе 1 и в дополнительном материале. Наиболее простые петли получаются, когда верхнее d и нижнее D основания трапецеидальных импульсов связаны между собой как D=3d (T=d+D=4d). В этом случае форма петель не зависит от m. Вычитание в (31) расщепления a из b_x позволяет переместить точку насыщения b из середины горизонтального участка петли, где α=T/4, в изначально принятое место её расположения (см. Рис. 11); здесь параметр α принимает значение равное T/8.

На Рис. 11 изображены петли трёх типов: Лист (Люфт без Усов), Месяц (Бумеранг) и Классическая, построенные согласно формул (31) (D=3d). Петля Лист является кусочно-линейной. Петли Месяц и Классическая являются гибридными – в них прямолинейные участки сочетаются с криволинейными. В случае, когда b_x=a, петли (31) вырождаются в прямоугольную петлю (Неидеальное Реле без Усов).



(а) (б) (в)

Рис. 12. Кусочно-линейные петли гистерезиса: (а) Люфт-Реле-Люфт (тетра-линейная петля), (б) Люфт-Люфт (три-линейная петля), (в) Люфт-Реле (три-линейная петля), построенные на трапецеидальных импульсах с использованием фазовых сдвигов.

а. Кусочно-линейные петли

С учётом фазовых сдвигов $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ уравнения (31) приобретают вид

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= \hat{a}\,\mathrm{trp}_c^m(\alpha+\Delta\alpha_1)+\hat{b}_x\,\mathrm{trp}_s^n(\alpha+\Delta\alpha_2),\\ y(\alpha) &= b_y\,\mathrm{trp}_s(\alpha+\Delta\alpha_3). \end{aligned} \tag{32}$$

Скорректированные параметры $\hat{a}$ и $\hat{b}_x$ определяются с помощью следующих формул[6]

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{a\,\mathrm{trp}_s^n(\alpha_b+\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)-b_x\mathrm{trp}_s^n(\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)}{\mathrm{trp}_c^m(\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)\mathrm{trp}_s^n(\alpha_b+\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)-\mathrm{trp}_c^m(\alpha_b+\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)\mathrm{trp}_s^n(\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)},\\ \hat{b}_x &= \frac{b_x\mathrm{trp}_c^m(\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)-a\,\mathrm{trp}_c^m(\alpha_b+\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)}{\mathrm{trp}_c^m(\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)\mathrm{trp}_s^n(\alpha_b+\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)-\mathrm{trp}_c^m(\alpha_b+\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)\mathrm{trp}_s^n(\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)}, \end{aligned} \tag{33}$$

где α_b равно $T/8-\Delta\alpha_1+\Delta\alpha_3$, $T/8-\Delta\alpha_1$, $3T/8-\Delta\alpha_2+\Delta\alpha_3$ и другим значениям[6] в зависимости от используемых диапазонов фазовых сдвигов $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$. Логика вывода формул (33) скорректированных параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}_x$ для кусочно-линейных петель (32) такая же, что и для случая гладких петель. При $\alpha_b=T/4$ рабочие формулы для определения скорректированных параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}_x$ можно получить из формул (16), (19), (21), (23) для гладких петель (13) простой заменой функций sin и cos трапецеидальными импульсами trp_s и trp_c, соответственно.

На Рис. 12 показаны кусочно-линейные петли гистерезиса, построенные с помощью уравнений (32) и скорректированных параметров (33) (m=n=1). В качестве примера на Рис. 13 представлена петля Люфт-Люфт при различных значениях фазового сдвига $\Delta\alpha_3$. Согласно определения (32) при подаче на вход кусочно-линейного гистерезисного элемента сигнала вида $x(\alpha)=\hat{a}\,\mathrm{trp}_c^m(\alpha+\Delta\alpha_1)+\hat{b}_x\,\mathrm{trp}_s^n(\alpha+\Delta\alpha_2)$, на выходе $y(\alpha)$ получа-

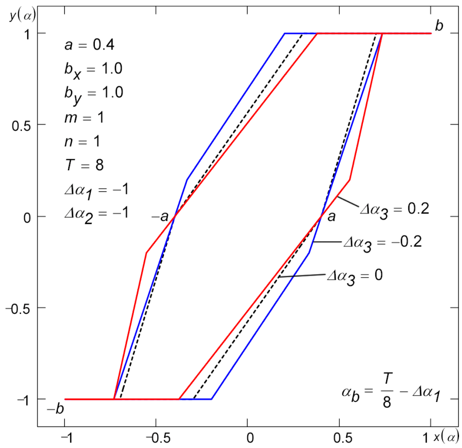


Рис. 13. Кусочно-линейная петля гистерезиса Люфт-Люфт при различных значениях фазового сдвига $\Delta\alpha_3$.

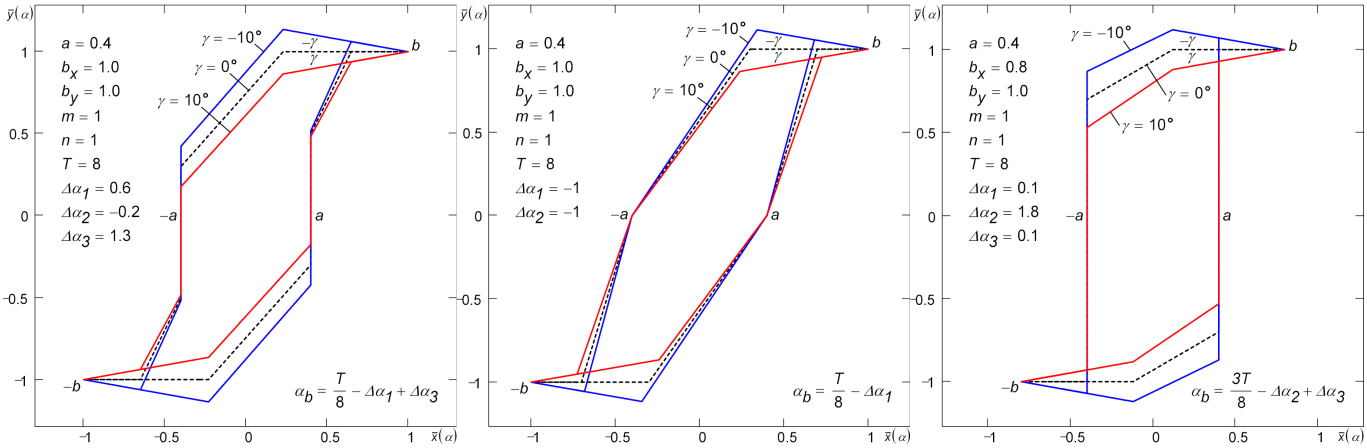


Рис. 14. Кусочно-линейные петли гистерезиса с усилением/ослаблением γ: (а) Люфт-Реле-Люфт, (б) Люфт-Люфт, (в) Люфт-Реле, построенные на трапецеидальных импульсах с использованием фазовых сдвигов.

ются трапецеидальные импульсы с заданным фазовым сдвигом $\Delta\alpha_3$.

Чтобы получить кусочно-линейные петли с усилением/ослаблением γ, добавим к (32) дополнительный член (кривую), отвечающий за усиление/ослабление (m=n=1)[6]

$$\begin{aligned}\bar{x}(\alpha) &= x(\alpha),\\ \bar{y}(\alpha) &= y(\alpha) + \tan\gamma\left[x(\alpha) - b_x \operatorname{trp_s}(\alpha + \Delta\alpha_3)\right].\end{aligned} \tag{34}$$

На Рис. 14 показаны петли с усилением (γ>0) и с ослаблением (отрицательным усилением γ<0), построенные по уравнениям (34). Петли на Рис. 14 без усиления (γ=0) соответствуют петлям, изображённым на Рис. 12.

Петли типа Люфт без Усов (Лист) (см. Рис. 11) невозможно наклонить в точке расщепления посредством поворота системы координат. Тем не менее, с помощью поворота этим петлям можно придать усиление/ослабление γ (m=n=1, $\Delta\alpha_1$=$\Delta\alpha_2$=$\Delta\alpha_3$=0)[6]

$$\begin{aligned}\bar{x}(\alpha) &= \frac{a\tan\beta \operatorname{trp_c}\alpha + \left(b_y - b_x\tan\gamma\right)\operatorname{trp_s}\alpha}{\tan\beta - \tan\gamma},\\ \bar{y}(\alpha) &= \tan\beta\left(\bar{x}(\alpha) - a\operatorname{trp_c}\alpha\right),\end{aligned} \tag{35}$$

где параметры петли a, b_x, b_y, β связаны между собой следующим соотношением: $\tan\beta = b_y/(b_x - a)$. Петли гистерезиса, построенные на трапецеидальных импульсах с помощью уравнений (35), представлены на Рис. 15.

Применяя разновидность поворота системы координат, найдены следующие преобразования (m=n=1, $\Delta\alpha_1$=$\Delta\alpha_2$=$\Delta\alpha_3$=0)[6]

$$\begin{aligned}\bar{x}(\alpha) &= x(\alpha),\\ \bar{y}(\alpha) &= y(\alpha) + a\tan\gamma\left(\operatorname{trp_c}\alpha\left|\operatorname{trp_s}\alpha\right| - \operatorname{trp_s}\alpha\right),\end{aligned} \tag{36}$$

с помощью которых на трапецеидальных импульсах можно строить петли Люфт-Люфт с Усилением без Усов[10] (см. Рис. 16).

b. Гибридные петли

Наклонение в точке расщепления посредством фазового сдвига $\Delta\alpha_1$ гибридной Клас-

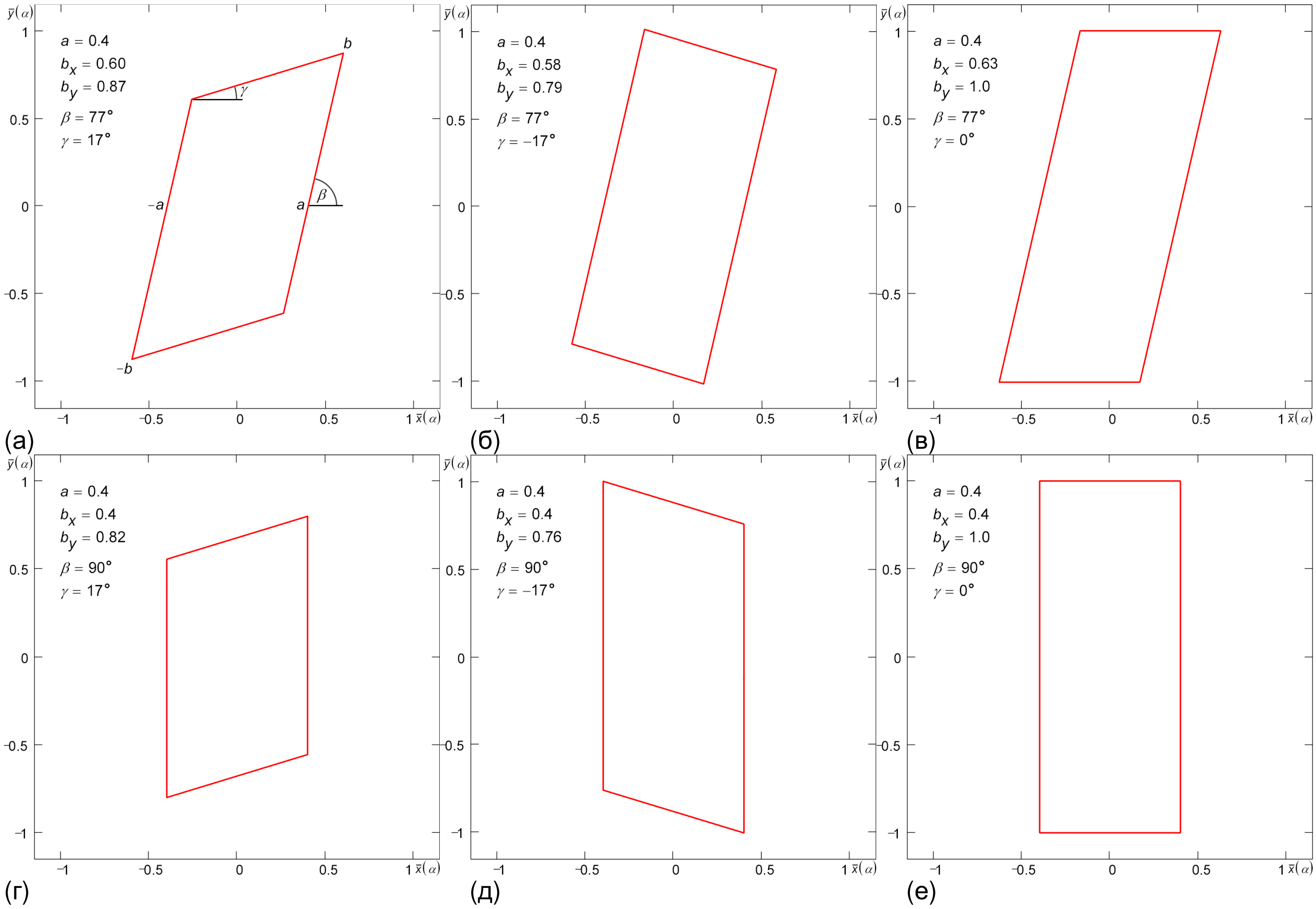


Рис. 15. Кусочно-линейные петли гистерезиса: (а) Люфт с Усилением без Усов (параллелограммная, билинейная, упругопластическая петля), (б) Люфт с Ослаблением без Усов, (в) Люфт без Усов, (г) Неидеальное Реле с Усилением без Усов, (д) Неидеальное Реле с Ослаблением без Усов, (е) Неидеальное Реле без Усов (прямоугольная петля), построенные на трапецеидальных импульсах.

сической петли (n=3, 5, …), показанной на Рис. 11, не применимо, поскольку при таком наклонении на криволинейных участках петли возникают изломы (скачки производной), а порождающие функции $x(\alpha)$, $y(\alpha)$ при одних и тех же значениях параметра α приобретают горизонтальные участки.[6] Получить петлю с заданным наклоном $\beta=\pi/2-\theta$ в точке расщепления, сохранив плавность криволинейных участков и горизонтальность прямолинейных участков, позволяет следующее преобразование (m=1, $\Delta\alpha_1=\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=0$)[6]

$$\begin{aligned}\bar{x}(\alpha) &= x(\alpha) + b_y \sin\theta\left(\operatorname{trp}_s \alpha - \operatorname{trp}_s^n \alpha\right),\\ \bar{y}(\alpha) &= y(\alpha).\end{aligned} \quad (37)$$

Преобразование (37) для гибридной петли подобно преобразованию (29) для гладкой петли. На Рис. 17 показаны гибридные классические петли гистерезиса без усов, наклонённые согласно преобразованию (37).[11, 12, 13]

Путём применения ряда линейных преобразований перекоса[6] получена универсальная формула (m=1, $\Delta\alpha_1=\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=0$)

$$\begin{aligned}\bar{x}(\alpha) &= x(\alpha) + \tan\theta\left[(b_x - a)\tan\kappa - b_x\tan\gamma + b_y\right]\left(\operatorname{trp}_s \alpha - \operatorname{trp}_s^n \alpha\right),\\ \bar{y}(\alpha) &= y(\alpha) + \left[(b_x - a)\tan\kappa - b_x\tan\gamma\right]\left(\operatorname{trp}_s \alpha - \operatorname{trp}_s^n \alpha\right) + a\tan\gamma\left(\operatorname{trp}_c \alpha \operatorname{trp}_s^k \alpha - \operatorname{trp}_s^n \alpha\right),\end{aligned} \quad (38)$$

которая позволяет строить на базе трапецеидальных импульсов гибридные классические петли без усов[12, 13] (см. Рис. 18), имеющие: заданный наклон β в точке расщепления (β=π/2-θ), заданный наклон (усиление/ослабление) γ прямолинейного участка, требуемую кривизну κ криволинейного участка. Введение помимо n=3, 5, … дополнительных параметров k=2, 4, … и κ, управляющих кривизной, продиктовано тем, что использование фазовых сдвигов $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ приводит к возникновению нежелательных изломов на криволинейных участках петли. В формуле (38) вместо функции $\mathrm{trp}_s^k\,\alpha$ можно использовать $\left|\mathrm{trp}_s^k\,\alpha\right|$, где k – любое положительное число. При γ=κ=0 формулы (38) вырождаются в формулы (37).

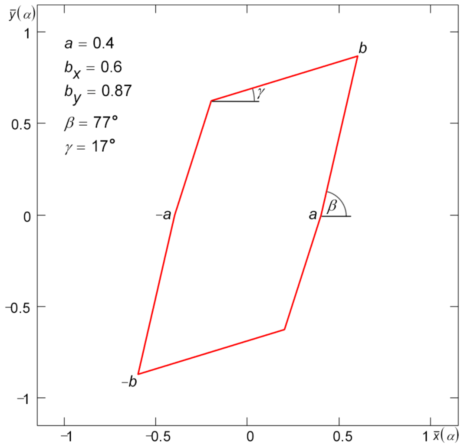


Рис. 16. Кусочно-линейная петля гистерезиса Люфт-Люфт с Усилением без Усов, построенная на трапецеидальных импульсах.

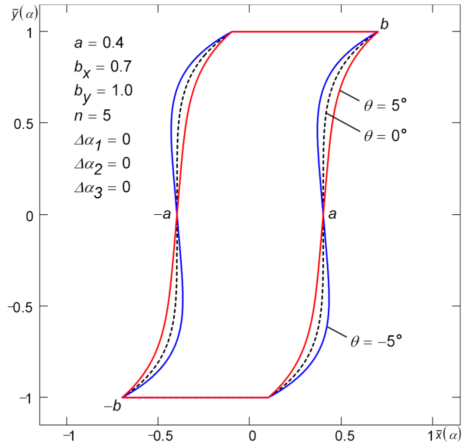
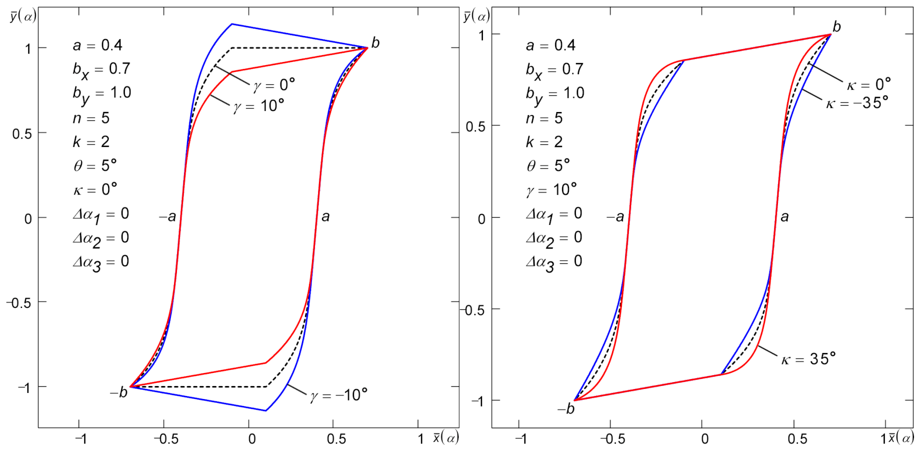


Рис. 17. Гибридные Классические петли гистерезиса без усов с заданным наклоном β=π/2-θ в точке расщепления. Петли построены на трапецеидальных импульсах. Площадь всех петель одна и та же при любых θ.



(а) (б)

Рис. 18. Гибридные Классические петли гистерезиса без усов с заданным наклоном β=π/2-θ, усилением/ослаблением γ и кривизной κ. (а) Разные усиления γ при фиксированных β и κ; (б) разные кривизны κ при фиксированных β и γ. Петли построены на трапецеидальных импульсах.

При необходимости формулы (31)-(38) можно выразить через треугольные импульсы, используя следующее представление трапецеидальных импульсов в виде суммы двух треугольных (D=3d, T=d+D).

$$
\begin{aligned}
\mathrm{trp}_s(\alpha) &= \mathrm{tri}_s(\alpha+\frac{T}{8}) + \mathrm{tri}_s(\alpha-\frac{T}{8}),\\
\mathrm{trp}_c(\alpha) &= \mathrm{tri}_c(\alpha+\frac{T}{8}) + \mathrm{tri}_c(\alpha-\frac{T}{8}).
\end{aligned}
\tag{39}
$$

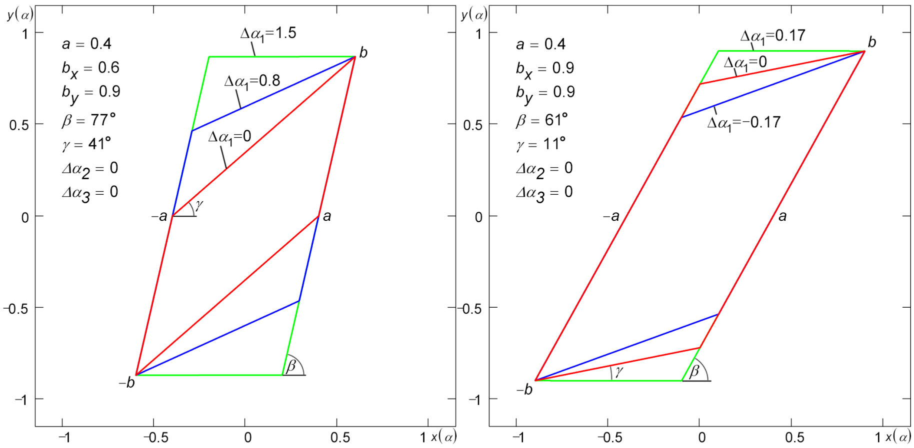
2. Петли на треугольных импульсах

Помимо трапецеидальных импульсов trp в формулах (13) могут использоваться треугольные импульсы tri,[1, 6] которые являются частными случаями трапецеидальных (d=0, T=D)

$$x(\alpha) = \hat{a}\,\mathrm{tri}_c^m(\alpha + \Delta\alpha_1) + \hat{b}_x\,\mathrm{tri}_s^n(\alpha + \Delta\alpha_2),$$
$$y(\alpha) = b_y\,\mathrm{tri}_s(\alpha + \Delta\alpha_3). \tag{40}$$

Рабочие формулы для определения скорректированных параметров $\hat{a}$ и $\hat{b}_x$ получаются из формул (16), (19), (21), (23) для гладких петель (13) простой заменой функций sin и cos треугольными импульсами tri_s и tri_c, соответственно.

На Рис. 19а представлена кусочно-линейная петля Лист (m=n=1), построенная по формулам (40) при различных значениях положительного фазового сдвига $\Delta\alpha_1$ ($\Delta\alpha_2$=$\Delta\alpha_3$=0). При $\Delta\alpha_1$=0.8 петля является разновидностью петли Люфт с Усилением без Усов (см. Рис. 20б); при $\Delta\alpha_1$=1.5 петля является разновидностью петли Люфт без Усов (см. Рис. 20е). Как видно из Рис. 19а, с помощью фазового сдвига $\Delta\alpha_1$ возможно управлять усилением γ.



(а) (б)

Рис. 19. Кусочно-линейная петля Лист (двухсегментная петля, Люфт без Усов) при различных значениях фазового сдвига $\Delta\alpha_1$, построенная на треугольных импульсах по (а) базовым, (б) обратным базовым уравнениям.

Показанные на рисунке углы β и γ, определяются по формулам

$$\tan\beta = \frac{b_y}{\hat{b}_x - \hat{a}} = \frac{b_y \tan\gamma}{b_y - 2\hat{a}\tan\gamma} = \frac{b_y\,\mathrm{tri}_c\,\Delta\alpha_1}{a(\mathrm{tri}_s\,\Delta\alpha_1 - 1) + b_x\,\mathrm{tri}_c\,\Delta\alpha_1},$$
$$\tan\gamma = \frac{b_y}{\hat{b}_x + \hat{a}} = \frac{b_y \tan\beta}{b_y + 2\hat{a}\tan\beta} = \frac{b_y\,\mathrm{tri}_c\,\Delta\alpha_1}{a(\mathrm{tri}_s\,\Delta\alpha_1 + 1) + b_x\,\mathrm{tri}_c\,\Delta\alpha_1}. \tag{41}$$

Используя формулы (41), уравнения (40) можно при необходимости выразить через углы β и/или γ. При b_x=a петля (40) вырождается в разновидность петли Неидеального Реле с Усилением без Усов (см. Рис. 20ж).

Подобно тому, как это было выполнено выше для петель (35), построенных на трапецеидальных импульсах, усиление/ослабление γ петель (40) можно изменять посредством поворота системы координат (m=n=1, $\Delta\alpha_1$=$\Delta\alpha_2$=$\Delta\alpha_3$=0)[6]

$$\bar{x}(\alpha) = b_x\,\mathrm{tri}_s\,\alpha + \left(\frac{2a\tan\beta}{\tan\beta - \tan\gamma} - b_x\right)\mathrm{tri}_c\,\alpha,$$
$$\bar{y}(\alpha) = b_y\,\mathrm{tri}_s\,\alpha + \frac{(a + b_x)\tan\gamma - b_y}{\tan\beta - \tan\gamma}\tan\beta\,\mathrm{tri}_c\,\alpha, \tag{42}$$

в котором параметры петли a, b_x, b_y, β связаны между собой соотношением $\tan\beta = b_y/(b_x - a)$.

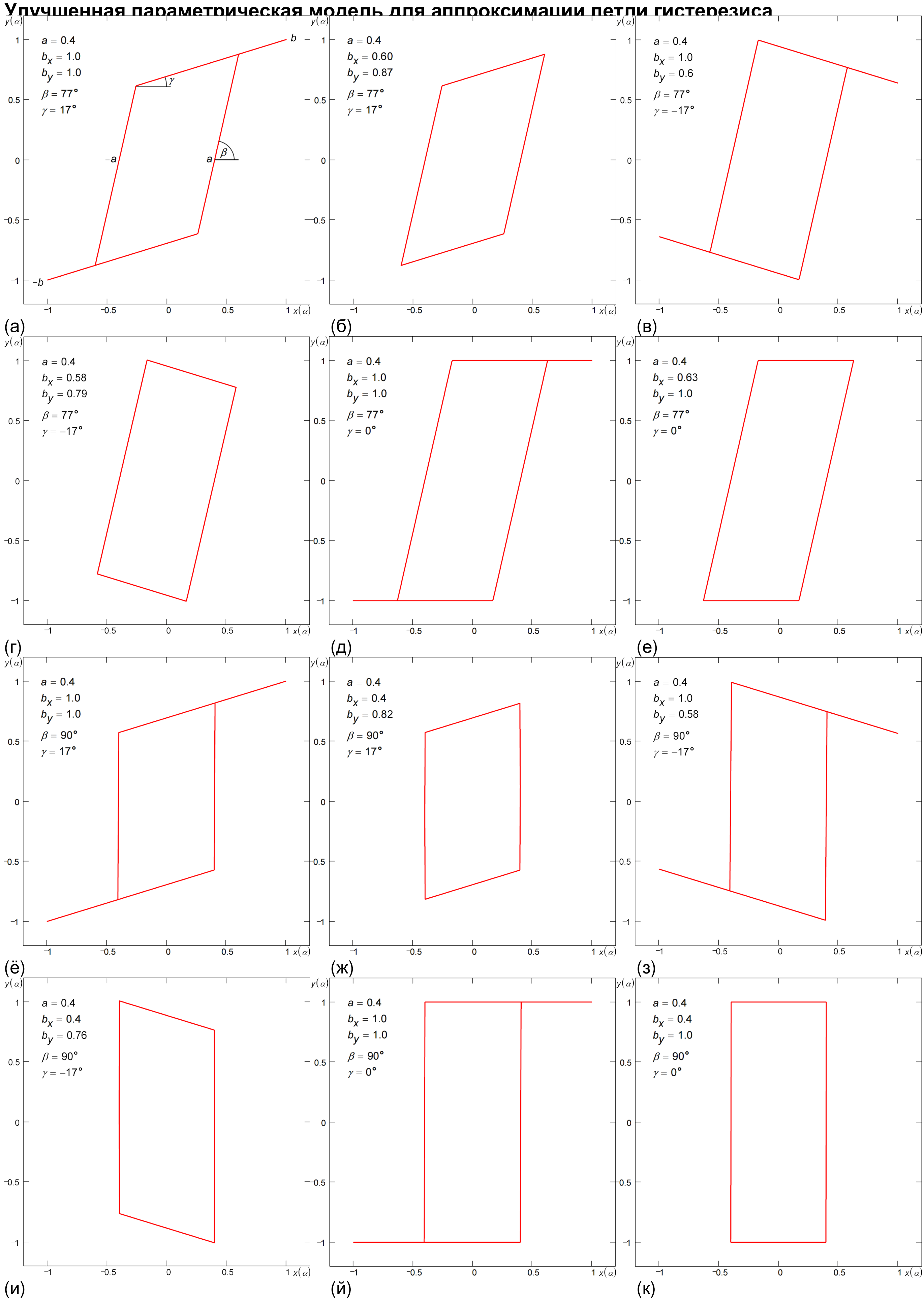


Рис. 20. Кусочно-линейные петли гистерезиса: (а) Люфт с Усилением, (б) Люфт с Усилением без Усов (параллелограммная петля), (в) Люфт с Ослаблением, (г) Люфт с Ослаблением без Усов, (д) Люфт, (е) Люфт без Усов, (ё) Неидеальное Реле с Усилением, (ж) Неидеальное Реле с Усилением без Усов, (з) Неидеальное Реле с Ослаблением, (и) Неидеальное Реле с Ослаблением без Усов, (й) Неидеальное Реле (триггер Шмидта), (к) Неидеальное Реле без Усов (прямоугольная петля), построенные на треугольных импульсах.

С помощью уравнений (42) можно строить кусочно-линейные петли, показанные на Рис. 20б, г, е, ж, и, к.

Другой способ описания петли типа Лист строится на основе функции обратной к (40) (m=n=1)[6]

$$
\begin{aligned}
x(\alpha) &= b_x \,\mathrm{tri_s}(\alpha + \Delta\alpha_3), \\
y(\alpha) &= \hat{b}_y \left[\frac{\hat{a}}{\hat{a} - b_x} \mathrm{tri_c}(\alpha + \Delta\alpha_1) + \mathrm{tri_s}(\alpha + \Delta\alpha_2) \right].
\end{aligned} \tag{43}
$$

Скорректированные параметры $\hat{a}$ и $\hat{b}_y$ в (43) находятся по формулам[6]

$$
\begin{aligned}
\hat{a} &= \frac{b_x \mathrm{tri_s}(\alpha_a + \Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_3)}{\mathrm{tri_c}(\alpha_a + \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_3) + \mathrm{tri_s}(\alpha_a + \Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_3)}, \\
\hat{b}_y &= \frac{b_y \mathrm{tri_c}(\alpha_a + \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_3)}{\mathrm{tri_c}(\alpha_a + \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_3)\mathrm{tri_c}(\Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_3) + \mathrm{tri_s}(\alpha_a + \Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_3)\mathrm{tri_s}(\Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_3)},
\end{aligned} \tag{44}
$$

где $\alpha_a = aT/(4b_x)$ – значение параметра α в точке расщепления a. При $b_x > 2a$ ($\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_3 = 0$) петля (43) является разновидностью петли Люфт с Усилением без Усов (см. Рис. 20б). При $b_x < 2a$ ($\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_3 = 0$) петля (43) является разновидностью петли Люфт с Ослаблением без Усов (см. Рис. 20г). При $b_x = 2a$ ($\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_3 = 0$) петля (43) вырождается в разновидность петли Люфт без Усов (см. Рис. 20е).

На Рис. 19б изображена построенная по формулам (43) кусочно-линейная петля Лист при различных значениях фазового сдвига $\Delta\alpha_1$ ($b_x > 2a$, $\Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_3 = 0$). Как видно из рисунка, с помощью фазового сдвига $\Delta\alpha_1$ возможно управлять усилением γ. Показанные на рисунке углы β и γ определяются по формулам[6]

$$
\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{\hat{b}_y}{b_x - \hat{a}} = \frac{b_x \tan\gamma}{b_x - 2\hat{a}} = \frac{b_y[\mathrm{tri_c}(\alpha_a + \Delta\alpha_1) + \mathrm{tri_s}\,\alpha_a]}{b_x[\mathrm{tri_c}(\alpha_a + \Delta\alpha_1) + \mathrm{tri_s}\,\alpha_a\,\mathrm{tri_s}\,\Delta\alpha_1]}, \\
\tan\gamma &= \frac{\hat{b}_y(b_x - 2\hat{a})}{b_x(b_x - \hat{a})} = \frac{(b_x - 2\hat{a})\tan\beta}{b_x} = \frac{b_y[\mathrm{tri_c}(\alpha_a + \Delta\alpha_1) - \mathrm{tri_s}\,\alpha_a]}{b_x[\mathrm{tri_c}(\alpha_a + \Delta\alpha_1) + \mathrm{tri_s}\,\alpha_a\,\mathrm{tri_s}\,\Delta\alpha_1]}.
\end{aligned} \tag{45}
$$

Используя формулы (45), уравнения (43) можно при необходимости выразить через углы β и/или γ. Если задать фазовый сдвиг $\Delta\alpha_1$ равным -1.0 (γ=41°), -0.73 (γ=25°) и -0.5 (γ=0°), то с помощью формул (43) можно построить такое же семейство петель с теми же параметрами a, b_x, b_y ($b_x < 2a$, $\Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_3 = 0$), что и на Рис. 19а, петли на котором построены по формулам (40). Задавая ненулевые фазовые сдвиги $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$, с помощью уравнений (43) можно построить кусочно-линейные петли, показанные на Рис. 20б, г-е, й, к.

Перенося в формулах (43) параметр расщепления a в аргумент функции треугольных импульсов, можно получить систему уравнений, описывающую кусочно-линейную петлю гистерезиса Люфт с Усилением ($\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_2 = \Delta\alpha_3 = 0$)[6]

$$x(\alpha) = b_x \operatorname{tri_s} \alpha,$$
$$y(\alpha) = (b_y - b_x \tan\gamma)\left[\operatorname{tri_s}\left(\alpha - \frac{\alpha_a \tan\beta}{\tan\beta - \tan\gamma} + \frac{T}{8}\right) - \operatorname{tri_c}\left(\alpha - \frac{\alpha_a \tan\beta}{\tan\beta - \tan\gamma} + \frac{T}{8}\right)\right] + b_x \tan\gamma \operatorname{tri_s} \alpha. \tag{46}$$

Параметры петли b_x, b_y, β, γ связаны между собой следующим образом: $2b_y/b_x = \tan\beta + \tan\gamma$. Указанная связь делает уравнения (46) существенно менее универсальными, чем даваемые ниже уравнения (47) и (54). Тем не менее, с помощью уравнений (46) можно строить петли подобные петлям, изображённым на Рис. 20а-е.

а. Универсальная формула кусочно-линейной петли

В ходе настоящего исследования получено общее выражение, описывающее кусочно-линейную петлю гистерезиса Люфт с Усилением[14] (см. Рис. 20а)[6]

$$x(\alpha) = b_x \operatorname{tri_s} \alpha,$$
$$y(\alpha) = (b_y - b_x \tan\gamma) \operatorname{trp_s}\left(\alpha - \frac{\alpha_a \tan\beta}{\tan\beta - \tan\gamma}\right) + b_x \tan\gamma \operatorname{tri_s} \alpha, \tag{47}$$

в котором верхнее основание d трапецеидальных импульсов $\operatorname{trp_s}$ определяется по формуле

$$d = \frac{T(b_x \tan\beta - b_y)}{2b_x(\tan\beta - \tan\gamma)}, \tag{48}$$

а нижнее основание D по формуле $D=T-d$. Пошаговый вывод формул (47) дан в дополнительном материале.

Кусочно-линейная петля (47) построена на комбинации треугольных и трапецеидальных импульсов. При необходимости трапецеидальные импульсы $\operatorname{trp_s}$ в (47) можно представить в виде суммы двух треугольных импульсов[6]

$$\operatorname{trp_s}(\alpha) = \frac{\operatorname{tri_s}\left(\alpha + \frac{d}{2}\right) + \operatorname{tri_s}\left(\alpha - \frac{d}{2}\right)}{\operatorname{tri_c}\left(\frac{\alpha_a \tan\beta}{\tan\beta - \tan\gamma} + \frac{d}{2}\right) + \operatorname{tri_c}\left(\frac{\alpha_a \tan\beta}{\tan\beta - \tan\gamma} - \frac{d}{2}\right)}. \tag{49}$$

Уравнения (47) являются универсальными, поскольку позволяют получить весь набор кусочно-линейных петель Люфт и Реле, показанных на Рис. 20. Например, полагая в (47), (48) $\gamma=0°$, получаем систему уравнений для построения петли гистерезиса типа Люфт[14, 15] (см. Рис. 20д)

$$x(\alpha) = b_x \operatorname{tri_s} \alpha,$$
$$y(\alpha) = b_y \operatorname{trp_s}(\alpha - \alpha_a), \tag{50}$$

в которой верхнее основание d трапецеидальных импульсов $\operatorname{trp_s}$ определяется по формуле

$$d = \frac{T(b_x \tan\beta - b_y)}{2b_x \tan\beta}. \tag{51}$$

Полагая в (47), (48) β=90°, получаем систему уравнений для построения петли гистерезиса Неидеальное Реле с Усилением[16] (см. Рис. 20ё)

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= b_x \operatorname{tri}_s \alpha, \\ y(\alpha) &= (b_y - b_x \tan\gamma)\operatorname{rect}_s(\alpha-\alpha_a) + b_x \tan\gamma \operatorname{tri}_s \alpha, \end{aligned} \tag{52}$$

в которой верхнее d и нижнее D основания трапецеидальных импульсов одинаковы и равны $T/2$. Последнее означает вырождение трапецеидальных импульсов в порождающей функции $y(\alpha)$ в прямоугольные импульсы rect_s со скважностью 2.

Полагая в (52) γ=0°, получаем систему уравнений для построения петли гистерезиса Неидеальное Реле (см. Рис. 20й)

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= b_x \operatorname{tri}_s \alpha, \\ y(\alpha) &= b_y \operatorname{rect}_s(\alpha-\alpha_a). \end{aligned} \tag{53}$$

Для получения петель без усов (см. Рис. 20б, г, е, ж, и, к) один из параметров a, b_x, b_y, β в формулах (47), (50), (52), (53) должен выражаться через остальные параметры согласно соотношения $\tan\beta=b_y/(b_x-a)$. Для получения петель с ослаблением[17, 18] (см. Рис. 20в, г, з, и) в формулах (47), (52) следует задавать отрицательный угол γ.

На Рис. 21 даны примеры разложения кусочно-линейных петель Люфт с Усилением ($b_{1x}=a_1b_x/a$, $b_{1y}=a_1b_y/a$, $\beta_1=\beta$, $\gamma_1=\gamma$, $a_2=a-a_1$, $b_{2x}=b_x-b_{1x}$, $b_{2y}=b_y-b_{1y}$, $\beta_2=\beta$, $\gamma_2=\gamma$), Люфт ($b_{1x}=a_1b_x/a$, $\tan\beta_1=Tb_{1y}/[(T-2d)b_{1x}]$, $\gamma_1=0$, $a_2=a-a_1$, $b_{2x}=b_x-b_{1x}$, $b_{2y}=b_y-b_{1y}$, $\tan\beta_2=Tb_{2y}/[(T-2d)b_{2x}]$, $\gamma_2=0$), Неидеальное Реле с Усилением ($b_{1x}=a_1b_x/a$, $\beta_1=90°$, $\gamma_1=\gamma$, $a_2=a-a_1$, $b_{2x}=b_x-b_{1x}$, $b_{2y}=b_y-b_{1y}$, $\beta_2=90°$, $\gamma_2=\gamma$) и Неидеальное Реле ($b_{1x}=a_1b_x/a$, $\beta_1=90°$, $\gamma_1=0$, $a_2=a-a_1$, $b_{2x}=b_x-b_{1x}$, $b_{2y}=b_y-b_{1y}$, $\beta_2=90°$, $\gamma_2=0$) на две петли того же типа, что и разлагаемая петля.[6] Поскольку каждую из петель

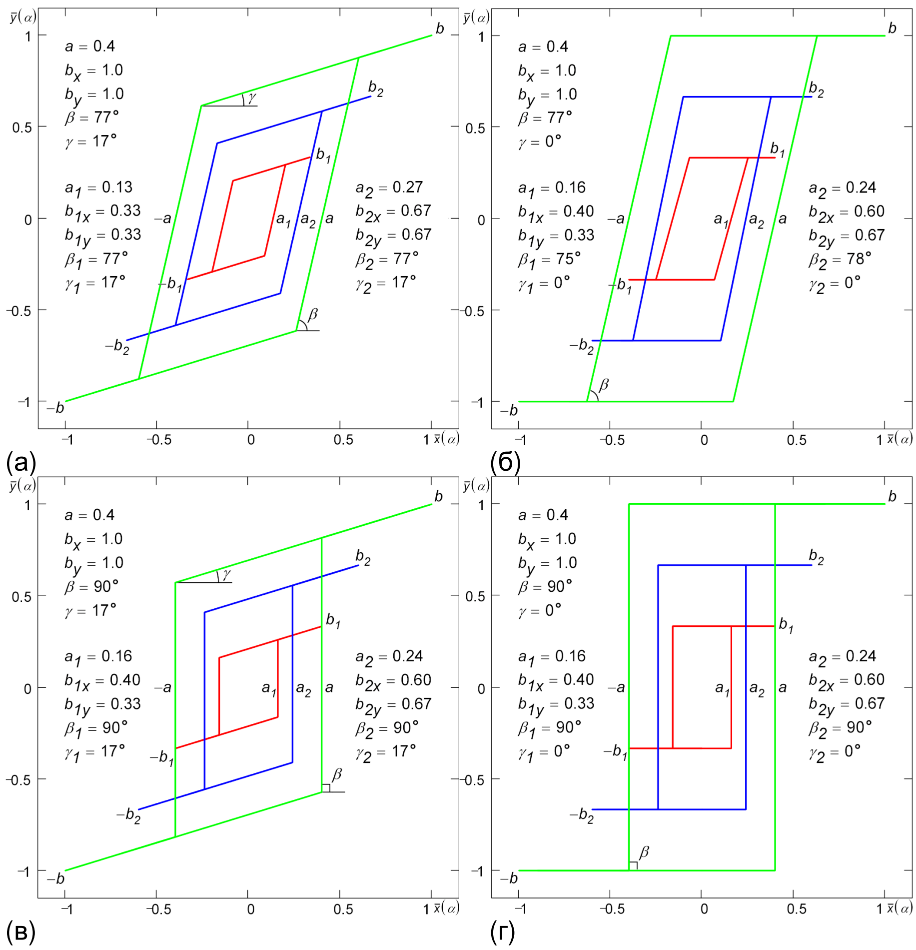


Рис. 21. Разложение кусочно-линейной петли (зелёная) (а) Люфт с Усилением, (б) Люфт, (в) Неидеальное Реле с Усилением, (г) Неидеальное Реле на две петли того же типа, что и разлагаемая петля.

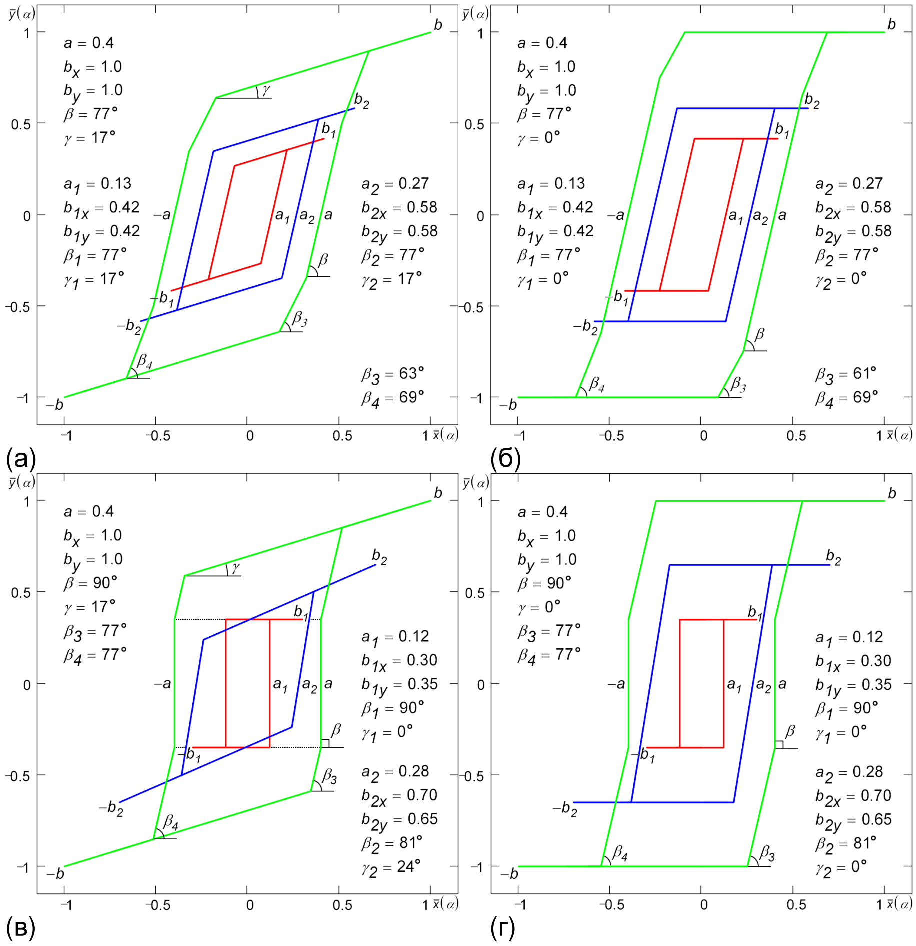


Рис. 22. Кусочно-линейные петли гистерезиса (а) Люфт-Люфт-Люфт с Усилением, (б) Люфт-Люфт-Люфт, (в) Люфт-Реле-Люфт с Усилением, (г) Люфт-Реле-Люфт, полученные сложением двух петель типа (а), (б) Люфт, (в), (г) Реле и Люфт.

разложения в свою очередь можно разложить аналогичным образом, то, как и гладкие петли, кусочно-линейные петли в общем случае можно представить в виде бесконечной суммы петель.

На Рис. 22 даны примеры построения более сложных кусочно-линейных петель: Люфт-Люфт-Люфт с Усилением[14] (p=2.4, $b_{1x}=b_x/p$, $b_{1y}=b_y/p$, $\beta_1=\beta$, $\gamma_1=\gamma$, $a_2=a-a_1$, $b_{2x}=b_x-b_{1x}$, $b_{2y}=b_y-b_{1y}$, $\beta_2=\beta$, $\gamma_2=\gamma$, где p – в общем случае произвольное число), Люфт-Люфт-Люфт (p=2.4, $b_{1x}=b_x/p$, $b_{1y}=b_y/p$, $\beta_1=\beta$, γ_1=0, $a_2=a-a_1$, $b_{2x}=b_x-b_{1x}$, $b_{2y}=b_y-b_{1y}$, $\beta_2=\beta$, γ_2=0), Люфт-Реле-Люфт с Усилением[19] ($\beta_1=\beta$, γ_1=0, $a_2=a-a_1$, $b_{2x}=b_x-b_{1x}$, $b_{2y}=b_y-b_{1y}$; a_1, β_2 и γ_2 определяются численным решением системы уравнений[6]), Люфт-Реле-Люфт ($\beta_1=\beta$, γ_1=0, $a_2=a-a_1$, $b_{2x}=b_x-b_{1x}$, $b_{2y}=b_y-b_{1y}$, γ_2=0; a_1 и β_2 определяются численным решением системы уравнений[6]). Петли типа Люфт-Люфт-Люфт представляют собой комбинацию из пары петель типа Люфт, петли типа Люфт-Реле-Люфт представляют собой комбинацию из петель типа Неидеальное Реле и типа Люфт.[6] Подробности образования/декомпозиции кусочно-линейных петель гистерезиса, представленных на Рис. 21 и Рис. 22, даны в дополнительном материале, там же можно найти разновидности этих петель с ослаблением и/или без усов.

Обнаружение в ходе физических измерений петель, изображённых на Рис. 22, может служить указанием на то, что в рассматриваемой системе действует два разных наложенных друг на друга гистерезисных процесса.

b. Порождающая функция с пороговым элементом

Помимо формул (47) для описания кусочно-линейной петли гистерезиса Люфт с Усилением (см. Рис. 20а) можно применить уравнения, в которых комбинация треугольных импульсов в порождающей функции $y(\alpha)$ пропущена через пороговый элемент H_r[6]

$$x(\alpha)=b_x \operatorname{tri}_s \alpha,$$
$$y(\alpha)=2(b_y-b_x\tan\gamma)\left[\mathrm{H_r}\left(\frac{a\tan\beta\operatorname{tri}_c\alpha+b_x\tan\gamma-b_y}{(a-b_x)\tan\beta+b_x\tan\gamma}+\operatorname{tri}_s\alpha\right)-\frac{1}{2}\right]+b_x\tan\gamma\operatorname{tri}_s\alpha. \quad (54)$$

Пороговый элемент $\mathrm{H_r}$ это функция реальной (неидеальной) ступеньки, задаваемая следующим образом

$$\mathrm{H_r}(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{t}{t_f}, & 0\le t\le t_f,\\ 1, & t>t_f,\end{cases} \quad (55)$$

где t_f – “длительность фронта” реальной ступеньки. Параметр t_f определяется по параметрам петли a, b_x, b_y, β, γ согласно следующей формулы[6]

$$t_f=\frac{2(b_x\tan\gamma-b_y)}{(a-b_x)\tan\beta+b_x\tan\gamma}, \quad (56)$$

и, наоборот, если зафиксировать значение длительности фронта ступеньки t_f, то по этой формуле можно определить один из параметров, перечисленных выше. При $t_f\to 0$ ($\beta\to 90°$) функция $\mathrm{H_r}$ вырождается в идеальную ступеньку H (функцию Хевисайда). В этом случае образуются петли типа Неидеальное Реле (см. Рис. 20ё-к).

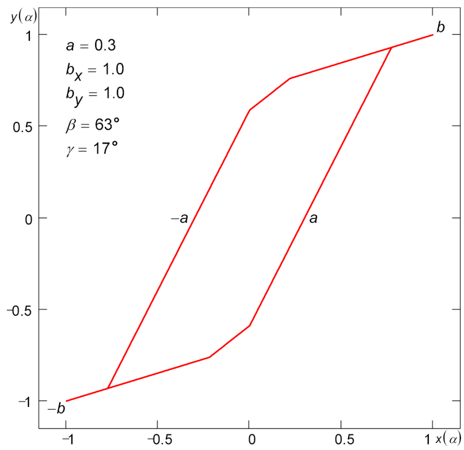


Рис. 23. Кусочно-линейная петля гистерезиса Люфт-Люфт с Усилением. Дополнительные изломы возникают, когда расщепление a и наклон β становятся меньше определённой величины.

Как правило, уравнения (54) позволяют получить весь набор типов кусочно-линейных петель Люфт и Реле, показанных на Рис. 20. Однако, при некоторых значениях параметров a, b_y, β, γ на петле могут возникать дополнительные изломы (см. Рис. 23, сравни с Рис. 20а), превращающие петлю Люфт в петлю Люфт-Люфт[10].

При необходимости формулы (40)-(47), (50), (52)-(54) можно выразить через трапецеидальные импульсы, используя следующее представление треугольных импульсов в виде суммы двух трапецеидальных (D=3d, T=d+D)

$$\operatorname{tri}_s(\alpha)=\frac{1}{2}\operatorname{trp}_s(\alpha+\frac{T}{8})+\frac{1}{2}\operatorname{trp}_s(\alpha-\frac{T}{8}),$$
$$\operatorname{tri}_c(\alpha)=\frac{1}{2}\operatorname{trp}_c(\alpha+\frac{T}{8})+\frac{1}{2}\operatorname{trp}_c(\alpha-\frac{T}{8}). \quad (57)$$

3. Сдвинутые петли

В общем случае сдвинутые кусочно-линейные петли (см. Рис. 24) получаются сложением двух кусочно-линейных петель (47). Параметры расщепления a_1, a_2 в таких петлях задают горизонтальный размер w сдвинутого участка, параметр насыщения b_{1y} определяет вертикальное положение h этого участка, усиление γ устанавливает наклон участка, а угол β_1 ($\beta_2=\beta_1$) определяет такой наклон складываемых петель, чтобы общий наклон β суммарной петли оказался равен заданному.

Для петли Сдвинутый Люфт с Усилением[19, 20] (см. Рис. 24а) расщепление a находится по формуле

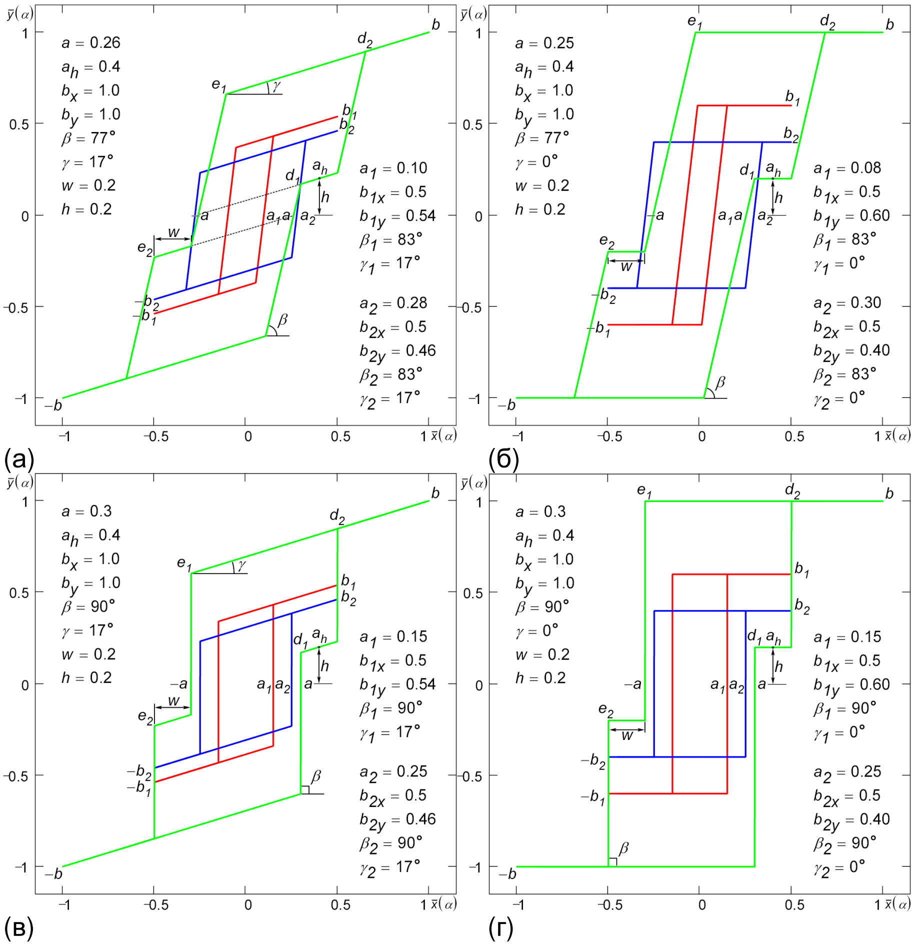


Рис. 24. Сдвинутые кусочно-линейные петли гистерезиса (а) Люфт с Усилением, (б) Люфт, (в) Неидеальное Реле с Усилением, (г) Неидеальное Реле, полученные сложением двух петель типа (а), (б) Люфт, (в), (г) Реле.

$$a = a_h - \frac{h}{\tan\beta} + \frac{w}{2}\left(\frac{\tan\gamma}{\tan\beta} - 1\right), \tag{58}$$

а расщепление a_1 – по формуле

$$a_1 = \frac{\left(a_h - \dfrac{w}{2}\right)(\tan\beta_1 - \tan\gamma) + b_x\tan\gamma - 2b_{1y}}{2\tan\beta_1}. \tag{59}$$

Остальные параметры a_2, b_{1y}, β_1 определяются численным решением следующей системы уравнений ($b_{1x}=b_x/2$, $\gamma_1=\gamma$, $b_{2x}=b_x$-b_{1x}, $b_{2y}=b_y$-b_{1y}, $\beta_2=\beta_1$, $\gamma_2=\gamma$)

$$\begin{aligned}
&\bar{x}\left(\alpha_{e_2}(a_2) - \frac{T}{2}\right) - \bar{x}\left(\alpha_{d_1}\right) = w,\\
&\bar{y}\left(\alpha_{a_h}, b_{1y}\right) = h,\\
&\frac{\bar{y}\left(\alpha_{d_2}(\beta_1)\right) - \bar{y}\left(\alpha_{e_2}(\beta_1) - \dfrac{T}{2}\right)}{\bar{x}\left(\alpha_{d_2}(\beta_1)\right) - \bar{x}\left(\alpha_{e_2}(\beta_1) - \dfrac{T}{2}\right)} = \tan\beta,
\end{aligned} \tag{60}$$

где $\bar{x}(\alpha)$, $\bar{y}(\alpha)$ – порождающие функции сдвинутой петли; α_{d_1}, α_{a_h} – значения параметра α в точках d_1, a_h сдвинутой петли, соответственно; $\alpha_{e_2}(a_2)$, $\alpha_{e_2}(\beta_1)$, $\alpha_{d_2}(\beta_1)$ – зависимости параметра α в точках e_2, d_2 сдвинутой петли от переменных a_2 и β_1, соответственно; $\bar{y}(\alpha_{a_h}, b_{1y})$ – зависимость порождающей функции от b_{1y} в точке a_h ($\alpha = \alpha_{a_h}$).[6]

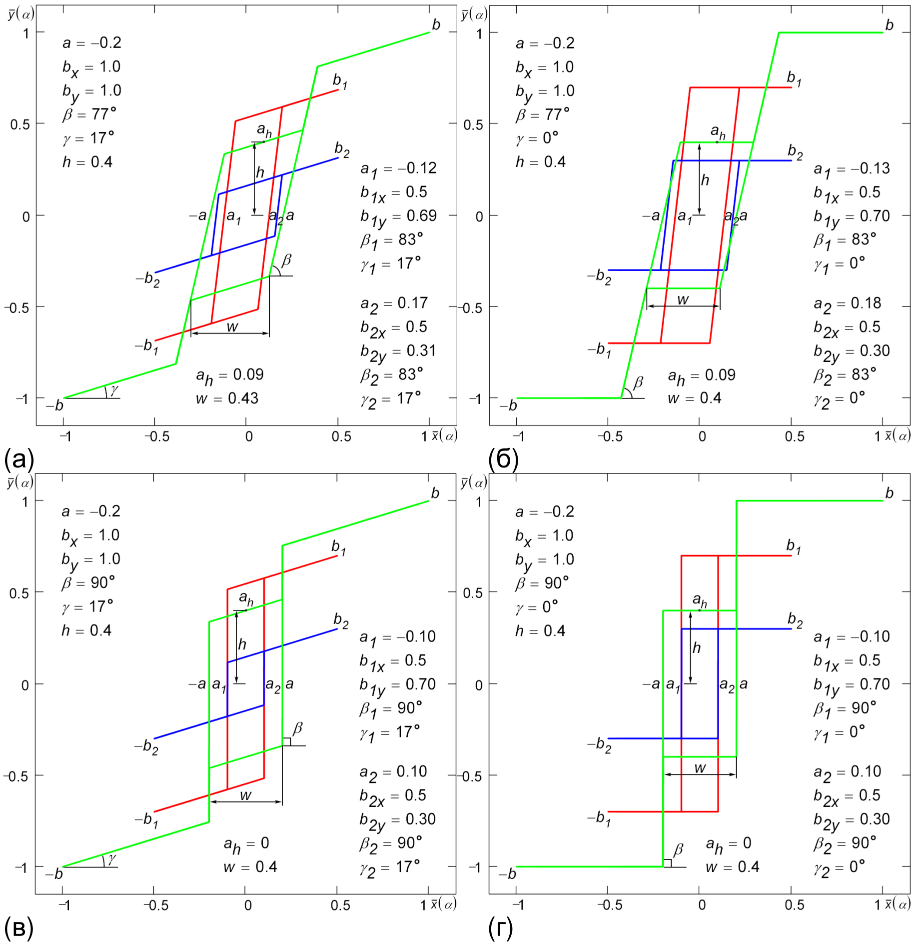


Рис. 25. Трёхуровневые кусочно-линейные петли гистерезиса (а) Люфт с Усилением, (б) Люфт, (в) Неидеальное Реле с Усилением, (г) Неидеальное Реле, полученные сложением двух петель типа (а), (б) Люфт, (в), (г) Реле.

На Рис. 24б, в, г приведены примеры сдвинутых петель Люфт,[14] Неидеальное Реле с Усилением,[21] Неидеальное Реле,[22] являющихся частными случаями петли Сдвинутый Люфт с Усилением. Другие разновидности сдвинутых петель с ослаблением и/или без усов даны в дополнительном материале. Обнаружение в ходе физических измерений сдвинутой петли указывает на то, что в рассматриваемой системе, по-видимому, одновременно действует два отдельных наложенных друг на друга гистерезисных процесса (например, имеется плёнка из двух слоёв, магнитные свойства/состояния которых различаются[20, 22]).

а. Трёхуровневые петли

Частным случаем сдвинутых петель являются трёхуровневые петли (см. Рис. 25). Трёхуровневые петли возникают при задании отрицательного расщепления a и выполнении следующего равенства[6]

$$w = \frac{2a\tan\beta}{\tan\gamma - \tan\beta}. \tag{61}$$

Описание трёхуровневых петель с ослаблением и/или без усов имеется в дополнительном материале. Обнаружение в ходе физических измерений трёхуровневой петли может являться признаком того, что в рассматриваемой системе одновременно действует два различных наложенных друг на друга гистерезисных процесса.

C. Двойные петли гистерезиса

1. Сцепление петель в точке насыщения

Для более адекватного описания двойных петель гистерезиса способ, предложенный в работе 1, был усовершенствован. В частности, уравнения двойной гладкой петли самонепересекающейся в точке начала координат (петля в форме 0) согласно усовершенствованному способу выглядят следующим образом (α=0…2π):

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}}(\alpha) &= x\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\pi-\alpha) - \Delta\alpha_3\right) + b_x \operatorname{sgn}(\pi-\alpha) = (2\operatorname{rect}\alpha - 1)\left(x\left(2\alpha - \Delta\alpha_3 - \frac{\pi}{2}\right) + b_x\right),\\ \bar{\bar{y}}(\alpha) &= y\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\pi-\alpha) - \Delta\alpha_3\right) + b_y \operatorname{sgn}(\pi-\alpha) = (2\operatorname{rect}\alpha - 1)\left(y\left(2\alpha - \Delta\alpha_3 - \frac{\pi}{2}\right) + b_y\right),\end{aligned} \tag{62}$$

где sgnα=α/|α| – сигнум-функция; rectα=H(α)-H(α-π) – прямоугольный импульс шириной π. Двойная петля (62) образуется путём сцепления двух петель в точке насыщения b, где порождающая функция $y(\alpha)$ достигает максимума b_y. На Рис. 26а показан пример двойной гладкой самонепересекающейся петли,[23] построенной по формулам (62).

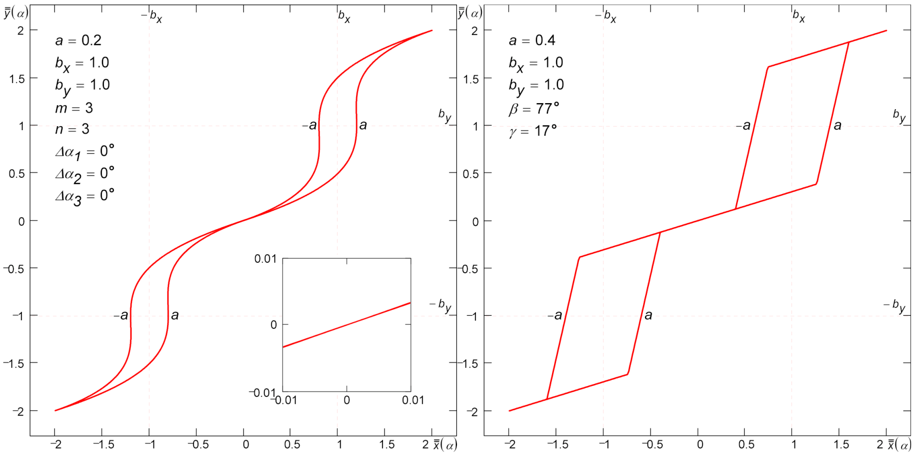
Согласно (62) движение по двойной петле начинается в точке (0, 0) и происходит против часовой стрелки сначала по верхней петле затем по нижней, движение заканчивается в точке (0, 0). Отличие двойной петли (62) от использовавшейся ранее заключается в том, что точка начала второй петли совпадает с точкой окончания первой, а точка окончания второй с точкой начала первой. Таким образом, двойная петля (62) при изменении параметра α от 0 до 2π прочерчивается непрерывно (“не отрывая карандаш от бумаги”).

Петля, при движении по которой происходит самопересечение в точке начала координат (петля в форме 8), строится по формулам (α=0…2π):

$$\begin{aligned}\bar{\bar{x}}(\alpha) &= x\left(\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sgn}(\pi-\alpha) - \Delta\alpha_3\right) + b_x \operatorname{sgn}(\pi-\alpha)\\ &= \operatorname{rect}\alpha\left(x\left(2\alpha - \Delta\alpha_3 - \frac{\pi}{2}\right) + b_x\right) + (1-\operatorname{rect}\alpha)\left(x\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\alpha_3 - 2\alpha\right) - b_x\right),\\ \bar{\bar{y}}(\alpha) &= y\left(\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sgn}(\pi-\alpha) - \Delta\alpha_3\right) + b_y \operatorname{sgn}(\pi-\alpha)\\ &= \operatorname{rect}\alpha\left(y\left(2\alpha - \Delta\alpha_3 - \frac{\pi}{2}\right) + b_y\right) + (1-\operatorname{rect}\alpha)\left(y\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\alpha_3 - 2\alpha\right) - b_y\right).\end{aligned} \tag{63}$$

Внешне петли (62) и (63) не отличаются друг от друга.

Двойные самонепересекающиеся и самопересекающиеся кусочно-линейные петли строятся по формулам (62) и (63), соответственно, в которых π заменён на T/2 (α=0…T). На Рис. 26б показан пример двойной кусочно-линейной самонепересекающейся петли,[16, 19, 24] построенной по формулам (62) при $\Delta\alpha_3$=0. Самопересекающаяся петля внешне выглядит также.



(а) (б)
Рис. 26. Двойная (а) гладкая, (б) кусочно-линейная петля гистерезиса, образованная сцеплением в точке насыщения b двух петель типа (а) Классическая, (б) Люфт с Усилением. В точке сцепления петлю можно сделать как самонепересекающейся, так и самопересекающейся.

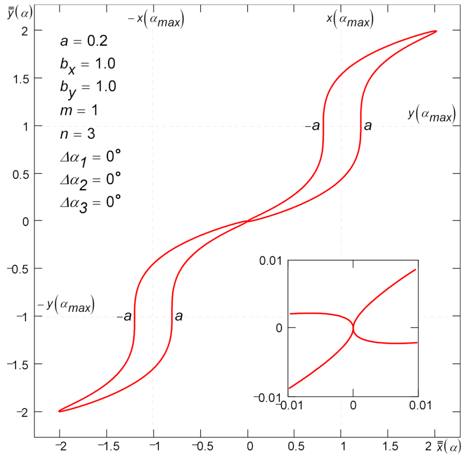


Рис. 27. Двойная гладкая петля гистерезиса, образованная сцеплением двух петель Классическая в точке x_{max}. В точке сцепления петлю можно сделать как самонепересекающейся, так и самопересекающейся.

2. Сцепление петель в точке x_{max}

Вместо сцепления двух петель в точке насыщения b, петли можно сцеплять в точке, где порождающая функция $x(\alpha)$ достигает максимума x_{max}. Чтобы определить значение параметра α_{max}, при котором $x(\alpha_{max})=x_{max}$, следует решить (численно) уравнение $dx(\alpha)/d\alpha = 0\,|_{\alpha=\alpha_{max}}$ или в развёрнутом виде

$$m\hat{a}\sin(\alpha_{max}+\Delta\alpha_1)\cos^{m-1}(\alpha_{max}+\Delta\alpha_1) - n\hat{b}_x\cos(\alpha_{max}+\Delta\alpha_2)\sin^{n-1}(\alpha_{max}+\Delta\alpha_2) = 0. \tag{64}$$

Двойные самонепересекающиеся петли, сцепленные в точке x_{max}, строятся по формулам

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}(\alpha) &= x\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn}(\pi-\alpha)+1) + \alpha_{max}\right) + x(\alpha_{max})\operatorname{sgn}(\pi-\alpha) \\ &= (1-2\operatorname{rect}\alpha)(x(2\alpha+\alpha_{max}) - x(\alpha_{max})), \\ \bar{\bar{y}}(\alpha) &= y\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn}(\pi-\alpha)+1) + \alpha_{max}\right) + y(\alpha_{max})\operatorname{sgn}(\pi-\alpha) \\ &= (1-2\operatorname{rect}\alpha)(y(2\alpha+\alpha_{max}) - y(\alpha_{max})). \end{aligned} \tag{65}$$

Двойные самопересекающиеся петли, сцепленные в точке x_{max}, строятся по формулам

$$\begin{aligned} \bar{\bar{x}}(\alpha) &= x\left(\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sgn}(\pi-\alpha) + \alpha_{max} - \frac{\pi}{2}\right) + x(\alpha_{max})\operatorname{sgn}(\pi-\alpha) \\ &= (1-\operatorname{rect}\alpha)(x(\alpha_{max}-2\alpha) - x(\alpha_{max})) - \operatorname{rect}\alpha\,(x(2\alpha+\alpha_{max}) - x(\alpha_{max})), \\ \bar{\bar{y}}(\alpha) &= y\left(\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sgn}(\pi-\alpha) + \alpha_{max} - \frac{\pi}{2}\right) + y(\alpha_{max})\operatorname{sgn}(\pi-\alpha) \\ &= (1-\operatorname{rect}\alpha)(y(\alpha_{max}-2\alpha) - y(\alpha_{max})) - \operatorname{rect}\alpha\,(y(2\alpha+\alpha_{max}) - y(\alpha_{max})). \end{aligned} \tag{66}$$

На Рис. 27 показана двойная самонепересекающаяся петля, построенная по формулам (65). Двойная самопересекающаяся петля, построенная по формулам (66), внешне выглядит также.

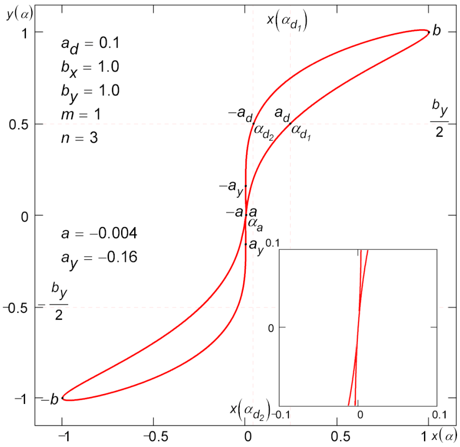
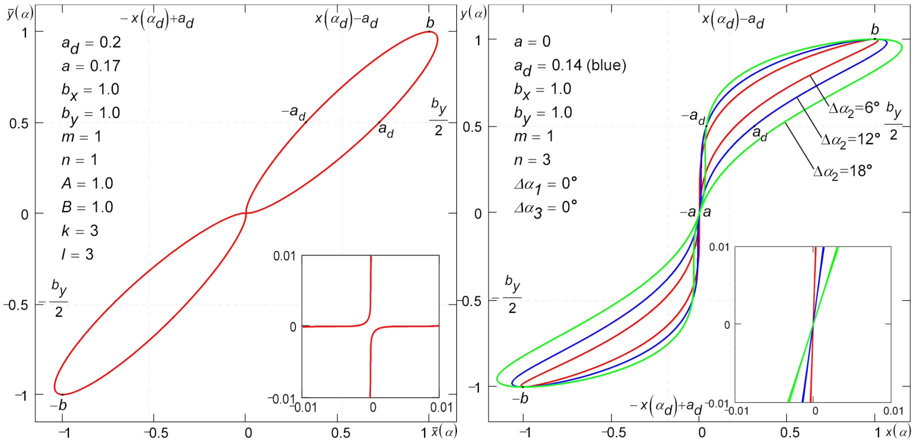


Рис. 28. Двойная самонепересекающаяся петля гистерезиса типа Пропеллер, образованная путём замены горизонтального расщепления на вертикальное.



(а) (б)

Рис. 29. Двойные самонепересекающиеся петли гистерезиса типа Пропеллер, образованные передавливанием петли в точке начала координат посредством (а) возведения в степень, (б) нулевого расщепления a и фазового сдвига $\Delta\alpha_2$.

3. Замена горизонтального расщепления на вертикальное

Простейший способ получения двойных самонепересекающихся петель типа Пропеллер[25] основан на представлении (2), в котором вместо расщепления a ($a\approx 0$) по x выполняется расщепление a_y по y. Уравнения расщепляющей кривой в этом случае имеют следующий вид: $x_2(\alpha)=a\cos^m\alpha$, $y_2(\alpha)=a_y\cos^m\alpha$. Из уравнения $y(\alpha_{d_{1,2}})=b_y/2$, записанного для полувысоты точки насыщения b_y (вместо полувысоты можно использовать любое нужное значение), находим зависимости (m=1)

$$\alpha_{d_{1,2}}(a_y)=\arccos\frac{b_y\left(a_y\pm\sqrt{4a_y^2+3b_y^2}\right)}{2\left(a_y^2+b_y^2\right)}. \tag{67}$$

После чего, решая численно уравнение

$$x\left(\alpha_{d_1}(a_y)\right)-x\left(\alpha_{d_2}(a_y)\right)=2a_d, \tag{68}$$

определяем такое значение вертикального расщепления a_y, при котором величина горизонтального расщепления a_d двойной петли на полувысоте точки насыщения b_y будет равна заданному значению. Полученная описанным способом двойная петля Пропеллер показана на Рис. 28. Рабочие выражения для случая m=3, 5, … даны в дополнительном материале.

4. Передавливание петли в точке начала координат

Двойные самонепересекающиеся петли типа Пропеллер можно образовывать “передавливанием” петли в точке начала координат (см. Рис. 29а). Передавливание происходит при возведении порождающих функций $x(\alpha)$, $y(\alpha)$ в нечётные степени k и l согласно выражениям (27). Из уравнения $\bar{y}(\alpha_d)=b_y/2$, записанного для полувысоты точки насыщения b_y (вместо полувысоты можно использовать любое нужное значение), находим параметр α_d

$$\alpha_d = \arcsin\frac{1}{\sqrt[l]{2Bb_y^{l-1}}}. \tag{69}$$

Решая уравнение

$$\bar{x}(\alpha_d) - \bar{x}(\pi - \alpha_d) = 2a_d, \tag{70}$$

можно определить такое значение расщепления a, при котором величина расщепления a_d двойной петли на полувысоте точки насыщения b_y будет равна заданному значению. Аналитическое решение уравнения (70) для k=3 выглядит следующим образом

$$a = \frac{\sqrt[3]{2A\left(a_d + \sqrt{4A^2 b_x^6 \sin^{6n}\alpha_d + a_d^2}\right)^2} - 2Ab_x^2 \sin^{2n}\alpha_d}{\cos^m \alpha_d \sqrt[3]{4A^2\left(a_d + \sqrt{4A^2 b_x^6 \sin^{6n}\alpha_d + a_d^2}\right)}}. \tag{71}$$

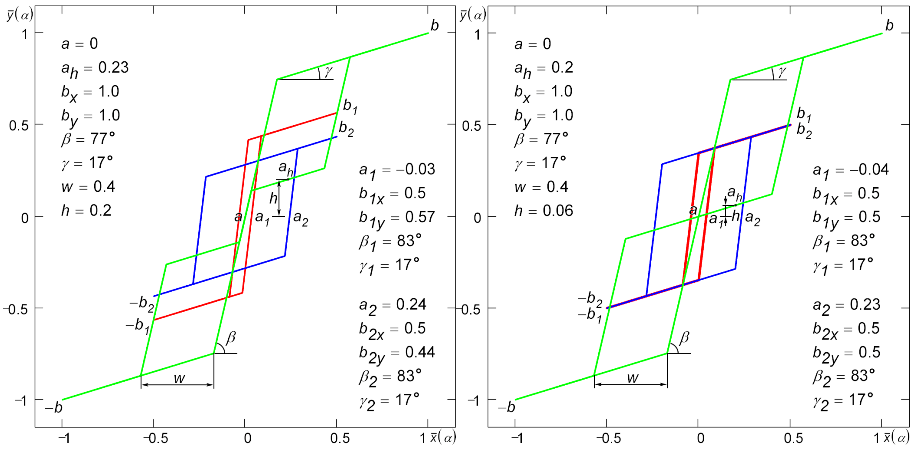
На передавливании петли основан ещё один способ получения двойных самонепересекающихся петель. В этом способе расщепление a в формуле (13) задаётся равным нулю, а фазовый сдвиг $\Delta\alpha_2$ (или $\Delta\alpha_3$), устанавливается отличным от нуля. В таких петлях сдвиг $\Delta\alpha_2$ (или $\Delta\alpha_3$) выполняет функцию расщепления a. На Рис. 29б показан пример двойной самонепересекающейся петли типа Пропеллер,[25, 26] полученной передавливанием. Из уравнения $y(\alpha_d)=b_y/2$, записанного для полувысоты точки насыщения b_y (вместо полувысоты можно использовать любое нужное значение), находим параметр $\alpha_d=\pi/6$. Решая численно уравнение

$$x(\alpha_d) - x(\pi - \alpha_d) = 2a_d, \tag{72}$$

можно определить такое значение фазового сдвига $\Delta\alpha_2$ (или $\Delta\alpha_3$), при котором величина расщепления a_d двойной петли на полувысоте точки насыщения b_y будет равна заданному значению.

5.Двойная кусочно-линейная петля как частный случай кусочно-линейной сдвинутой петли

Задавая нулевое расщепление a=0, сдвинутая петля (см. раздел II.B.3) вырождается в двойную самонепересекающуюся петлю Люфт с Усилением[27] (см. Рис. 30а). Задавая помимо нулевого расщепления высоту сдвинутого участка согласно формулы $h=w\tan\gamma/2$, можно получить двойную самонепересекающуюся петлю Люфт с



(а) (б)

Рис. 30. Двойные кусочно-линейные самонепересекающиеся петли гистерезиса Люфт с Усилением (а) с перемычкой, (б) без перемычки. Петли образованы в результате сложения двух одинарных петель Люфт с Усилением.

Усилением без перемычки[19, 24] (см. Рис. 30б). Двойные самонепересекающиеся петли Люфт, Реле с Усилением и Реле, имеющие и не имеющие перемычку, а также разновидности этих петель с ослаблением и/или без усов даны в дополнительном материале. Из способа образования двойной петли следует, что её обнаружение в ходе физических измерений может являться признаком того, что в рассматриваемой системе одновременно действует два разных наложенных друг на друга гистерезисных процесса.

D. Тройные петли гистерезиса

1. Сцепление петель в точках насыщения

Тройную петлю можно собрать из трёх петель – центральной и двух внешних. Тройные гладкие петли, сцепленные в точках насыщения b, строятся по формулам (α=0…2π)

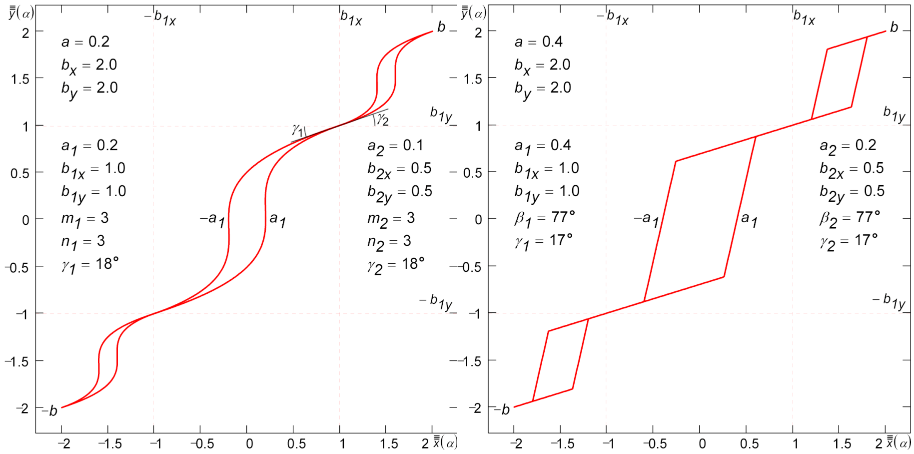
$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\overline{x}}}(\alpha) &= (\operatorname{rect}\alpha + \operatorname{rect}(\alpha-\pi))x_1\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \\
&+ (\operatorname{rect}\alpha + \operatorname{rect}(\alpha-\pi) - 1)\left[x_2\left(\pm 3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - (b_{1x} + b_{2x})\operatorname{sgn}(\pi-\alpha)\right], \\
\overline{\overline{\overline{y}}}(\alpha) &= (\operatorname{rect}\alpha + \operatorname{rect}(\alpha-\pi))y_1\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \\
&+ (\operatorname{rect}\alpha + \operatorname{rect}(\alpha-\pi) - 1)\left[y_2\left(\pm 3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - (b_{1y} + b_{2y})\operatorname{sgn}(\pi-\alpha)\right],
\end{aligned} \tag{73}$$

где $x_1(\alpha)$, $y_1(\alpha)$ – уравнения центральной петли; $x_2(\alpha)$, $y_2(\alpha)$ – уравнения внешних петель; b_{1x}, b_{1y} – координаты точки насыщения центральной петли; b_{2x}, b_{2y} – координаты точек насыщения внешних петель; $\operatorname{rect}\alpha = H(\alpha) - H(\alpha - \pi/3)$ – прямоугольный импульс шириной $\pi/3$.

При сборке петель (73) обычно выполняется условие $\gamma_1=\gamma_2$, где γ_1, γ_2 – углы наклона касательных к нерасщеплённой (a_1=0) центральной петле и нерасщеплённым (a_2=0) внешним петлям, соответственно, в точке насыщения b_1. Углы наклона γ_1, γ_2 касательных определяются по формулам[6]

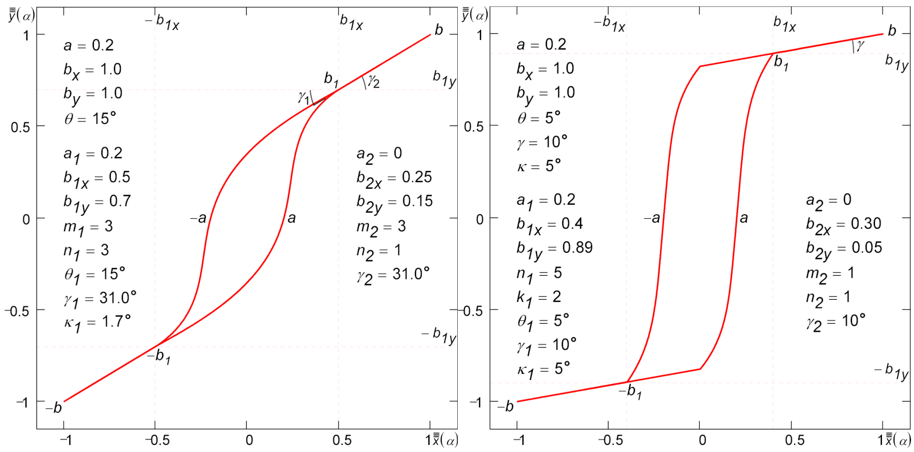
$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \arctan\frac{b_{1y}}{n_1 b_{1x}}, \\
\gamma_2 &= \arctan\frac{b_{2y}}{n_2 b_{2x}}.
\end{aligned} \tag{74}$$

Если в уравнениях (73) аргумент 3α функций $x_2(\alpha)$, $y_2(\alpha)$ используется со знаком плюс, то получается самонепересекающаяся петля, если со знаком минус – самопересекающаяся. Внешне самонепересекающиеся и самопересекающиеся петли друг от друга не отличаются. Типы центральной и внешних петель могут быть различными. На Рис. 31а показана тройная гладкая самонепересекающаяся петля, построенная по уравнениям (73). Петля состоит из центральной Классической петли (1) (a_1=a) и пары внешних Классических петель (1) ($b_{2x}=(b_x-b_{1x})/2$, $b_{2y}=n_2 b_{2x}\tan\gamma_1$, $\gamma_2=\gamma_1$). В дополнительном материале да-



(а) (б)

Рис. 31. Тройная (а) гладкая, (б) кусочно-линейная петля гистерезиса, образованная сцеплением в точках насыщения *b* трёх петель типа (а) Классическая, (б) Люфт с Усилением. В точках сцепления петлю можно сделать как самонепересекающейся, так и самопересекающейся.



(а) (б)

Рис. 32. Симуляция одинарной Классической (а) гладкой, (б) гибридной петли с длинными усами с помощью тройной самонепересекающейся петли гистерезиса. Усы – внешняя пара нерасщеплённых петель типа Лист (а) гладких, (б) кусочно-линейных.

ются формулы тройных петель, сцепленных в точках x_{max}.

Тройные самонепересекающиеся и самопересекающиеся кусочно-линейные петли[28] получаются из формул (73) заменой π на $T/2$ (α=0…T). На Рис. 31б показана тройная кусочно-линейная самонепересекающаяся петля, построенная по уравнениям (73). Петля состоит из центральной петли Люфт с Усилением (47) (a_1=a) и пары внешних петель Люфт с Усилением (47) (b_{2x}=(b_x-b_{1x})/2, b_{2y}=(b_y-b_{1y})/2, γ_2=γ_1).

2. Петли с усами произвольно большой длины

Тройные петли гистерезиса (73) удобно применять, в тех случаях, когда требуется получить одинарные гладкие[25, 29] или одинарные гибридные[15] петли гистерезиса с длинными усами. Напомним, что длинные усы в модели (1) можно получить, увеличивая степень m,[6] однако одновременно с этим происходит значительное изменение кривизны петли. На Рис. 32а показана симуляция одинарной гладкой петли наклонная Классическая с длинными усами с помощью тройной самонепересекающейся гладкой петли (73). Тройная петля состоит из центральной наклонной Классической петли (30) (a_1=a, θ_1=θ) и усов, образованных из пары внешних нерасщеплённых петель типа Лист (1) (a_2=0, b_{2x}=(b_x-b_{1x})/2, b_{2y}=(b_y-b_{1y})/2, m_2=3, n_2=1), ориентированных под углом γ_2=arctan(b_{2y}/b_{2x}).

Необходимое искривление κ_1 петли определяется по формуле

$$\kappa_1 = \arctan \frac{b_{1y}\left[\tan\theta_1 (1-n_1)(b_y - b_{1y}) - b_x + b_{1x}\right] + n_1 b_{1x}(b_y - b_{1y})}{b_{1x}(n_1 - 1)\left[\tan\theta_1 (b_y - b_{1y}) - b_x + b_{1x}\right]}. \tag{75}$$

Формула (75) найдена из условия $\gamma_1=\gamma_2$, где γ_1, γ_2 – углы наклона касательных к нерасщеплённой (a_1=0) центральной петле и нерасщеплённым (a_2=0) внешним петлям, соответственно, в точке насыщения b_1. Из формулы (75) для некоторого произвольного значения κ_1 можно определить соответствующее значение θ_1 или для произвольных значений b_x, κ_1, θ_1 найти соответствующее значение b_y.

На Рис. 32б показан пример построения из трёх петель наклонной гибридной Классической петли с усами.[7, 15] Петля состоит из центральной наклонной гибридной Классической петли без усов (38) ($a_1=a$, $b_{1y}=b_y$-$2b_{2y}$, $\theta_1=\theta$, $\gamma_1=\gamma$, $\kappa_1=\kappa$) и усов, образованных из пары внешних нерасщеплённых кусочно-линейных петель Люфт с Усилением без Усов (40) (a_2=0, $b_{2x}=(b_x$-$b_{1x})/2$, $b_{2y}=b_{2x}\tan\gamma_2$, $m_2=n_2$=1, $\gamma_2=\gamma_1$).[6] В связи с переносом в (31) точки насыщения b из позиции $\alpha=T/4$ в позицию $\alpha=T/8$ ($\Delta\alpha=T/8$) в формулах (73) помимо замены π на $T/2$ из аргументов функций x_1 и y_1 следует вычесть величину $T/8$. Кусочно-линейные петли с усами любой длины строятся непосредственно по уравнениям (47).

3.Добавление вертикального расщепления

Простейший способ получения тройных самопересекающихся петель типа Классическая основан на представлении (2), в котором помимо расщепления a_x по x выполняется дополнительное расщепление a_y по y. Уравнения расщепляющей кривой в этом случае имеют следующий вид: $x_2(\alpha)=a_x\cos^m\alpha$, $y_2(\alpha)=a_y\cos^m\alpha$. Уравнения тройной петли с учётом дополнительного расщепления записываются как

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= a_x \cos^m \alpha + \hat{b}_x \sin^n \alpha, \\ y(\alpha) &= a_y \cos^m \alpha + \hat{b}_y \sin \alpha, \end{aligned} \tag{76}$$

где параметры a_x, a_y, $\hat{b}_x$, $\hat{b}_y$ определяются по формулам (m=1):[6]

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{a\cos^n \alpha_a - b_x \sin^n \alpha_a}{\sin^{n+1} \alpha_a + \cos^{n+1} \alpha_a}, \\ a_y &= -b_y \sin \alpha_a, \\ \hat{b}_x &= \frac{a\sin \alpha_a + b_x \cos \alpha_a}{\sin^{n+1} \alpha_a + \cos^{n+1} \alpha_a}, \\ \hat{b}_y &= b_y \cos \alpha_a, \end{aligned} \tag{77}$$

где α_a – значение параметра α в точке расщепления a. Отрицательное α_a задаёт величину перехлёста тройной петли. Рабочие выражения для случая m=3, 5, … даны в дополнительном материале. Как следует из формул (77), при α_a=0 тройная петля вырождается в обычную петлю Классическая. Задавая α_a>0, можно изменять форму и кривизну одинарной петли.[6]

Полученная описанным способом тройная петля Классического типа[25, 29] показана на Рис. 33. Стоит отметить, что, полагая расщепление a=0, тройная самопересекающаяся

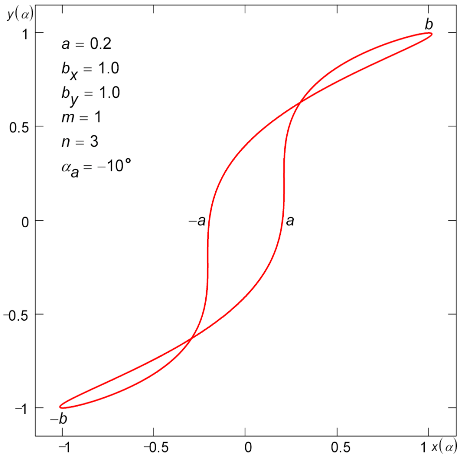


Рис. 33. Тройная гладкая самопересекающаяся петля гистерезиса Классического типа, образованная в результате дополнительного вертикального расщепления.

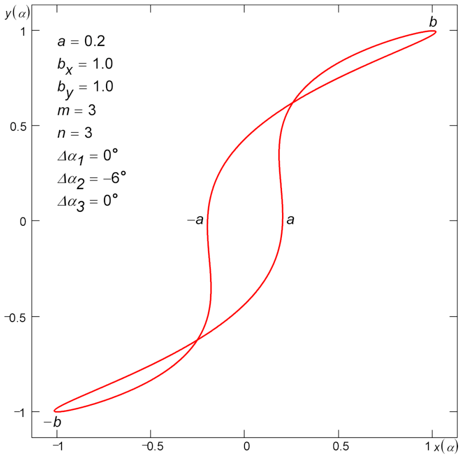


Рис. 34. Тройная гладкая самопересекающаяся петля гистерезиса Классического типа, образованная в результате “сжатия” фазовым сдвигом $\Delta\alpha_2$.

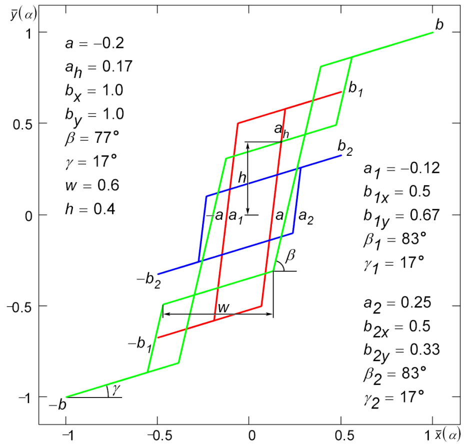


Рис. 35. Тройная кусочно-линейная самопересекающаяся петля гистерезиса типа Люфт с Усилением, образованная в результате сложения двух одинарных петель Люфт с Усилением.

петля вырождается в двойную самонепересекающуюся петлю типа Пропеллер (см. также раздел II.C.3).[6]

4. Сжатие с перехлёстом

Тройные самопересекающиеся петли в улучшенной модели (13) образуются путем задания отрицательного фазового сдвига $\Delta\alpha_2$ (или положительного $\Delta\alpha_3$), настолько сильно “сжимающего” петлю, что возникает перехлёст. Пример тройной петли Классического типа,[25, 29] полученной данным способом показан на Рис. 34. Стоит отметить, что, полагая расщепление a=0, тройная самопересекающаяся петля вырождается в двойную самонепересекающуюся петлю типа Пропеллер (см. раздел II.C.4).

5. Тройная кусочно-линейная петля как частный случай кусочно-линейной сдвинутой петли

Из сдвинутой петли (см. раздел II.B.3) можно получить тройную самопересекающуюся петлю (см. Рис. 35). Для этого расщепление a должно быть отрицательным, а горизонтальный размер w сдвинутого участка петли должен превосходить значение w, определяемое формулой (61). Тройные самопересекающиеся петли Люфт, Реле с Усилением, Реле, а также разновидности этих петель с ослаблением и/или без усов даны в дополнительном материале. Из способа образования тройной петли следует, что её обнаружение в ходе физических измерений может являться признаком того, что в рассматриваемой системе одновременно действует два разных наложенных друг на друга гистерезисных процесса.

E. Площадь петли гистерезиса

Площадь петли гистерезиса характеризует потери энергии в пьезоэлектрике/ферромагнетике при приложении к нему переменного электрического/магнитного поля. Чтобы найти площадь петли гистерезиса воспользуемся известной общей формулой

$$S=\oint x(\alpha)\frac{dy(\alpha)}{d\alpha}d\alpha=-\oint y(\alpha)\frac{dx(\alpha)}{d\alpha}d\alpha=\frac{1}{2}\oint\left[x(\alpha)\frac{dy(\alpha)}{d\alpha}-y(\alpha)\frac{dx(\alpha)}{d\alpha}\right]d\alpha. \tag{78}$$

Согласно (78), масштабирование $\overline{x}(\alpha)=Ax(\alpha)$, $\overline{y}(\alpha)=By(\alpha)$ петли гистерезиса приводит к изменению её площади пропорционально произведению масштабных коэффициентов A и B, т. е. $\overline{S}=ABS$. На Рис. 36а показана серия из трёх петель гистерезиса, площади которых при масштабировании удваиваются.

1. Гладкие петли

Подставляя в (78) выражения $x(\alpha)$, $y(\alpha)$ улучшенной модели (13) вместе с их производными и интегрируя, получаем[6, 30]

$$\begin{aligned}S&=\left[\frac{\hat{a}}{2^{m-1}}C_m^{\frac{m-1}{2}}\cos(\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)+\frac{\hat{b}_x}{2^{n-1}}C_n^{\frac{n-1}{2}}\sin(\Delta\alpha_2-\Delta\alpha_3)\right]\pi b_y\\&=\frac{Am_1(\cos\Delta\alpha_3-\tan\varphi_1\sin\Delta\alpha_3)}{\sqrt{\tan^2\varphi_1+1}}\pi b_y=(A_1\cos\Delta\alpha_3-B_1\sin\Delta\alpha_3)\pi b_y,\end{aligned} \tag{79}$$

где n – нечётное число; A_1, B_1 – коэффициенты Фурье для первой гармоники (см. формулы (25)). Из формулы (79) следует, что площадь петли (13) определяется амплитудой Am_1 и фазой φ_1 только первой гармоники; остальные гармоники разложения (7) порождающей функции $x(\alpha)$ никакого влияния на площадь S не оказывают.

Наклон петли с помощью фазового сдвига $\Delta\alpha_1$ ($m>1$, $\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=0$) вызывает рост её площади S (см. Рис. 3). Площадь S петли гистерезиса возрастает при увеличении фазового сдвига $\Delta\alpha_2$ (см. Рис. 4). При увеличении фазового сдвига $\Delta\alpha_3$ площадь S уменьшается (см. Рис. 5).

Из формулы (79) следует, что при $\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3$ площадь петли

$$S=\frac{C_m^{\frac{m-1}{2}}\pi ab_y}{2^{m-1}\cos^{m-1}(\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3)}. \tag{80}$$

Таким образом, при указанном условии петли любого типа (n не входит в формулу) с любыми значениями насыщения b_x будут иметь одну и ту же площадь S при одних и тех же параметрах a, b_y и m (см. Рис. 36б).

Из формулы (80) следует, что в случае $\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=0$ площадь петли с отрицательным наклоном ($\Delta\alpha_1>0$) в точке расщепления равна площади петли с положительным наклоном ($\Delta\alpha_1<0$) в точке расщепления, т. е. $S|_{+\Delta\alpha_1}=S|_{-\Delta\alpha_1}$. Из формулы (80) также следует, что $S|_{|\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3|>0}>S|_{\Delta\alpha_1-\Delta\alpha_3=0}$. Таким образом, для любого типа петли в случае $\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=0$ ($m>1$) потери энергии в наклонённых петлях ($\Delta\alpha_1\neq0$, см. Рис. 3) больше чем в “прямых” ($\Delta\alpha_1=0$).

Из формулы (80) также следует, что при $m=1$ ($\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3$) площадь петли

$$S = \pi a b_y. \tag{81}$$

Таким образом, при указанных условиях петли любого типа (n не входит в формулу) с любыми значениями насыщения b_x и с любыми значениями фазовых сдвигов будут иметь одну и ту же площадь при одних и тех же параметрах a и b_y. В качестве примера на Рис. 36в представлены петли одинаковой площади с разными фазовыми сдвигами $\Delta\alpha_1$. Формула для определения площадей петель Лист (n=1), у которых m=1, а $\Delta\alpha_1$=$\Delta\alpha_3$, выглядит также как и (81). Площади этих петель также не зависят ни от величин насыщения b_x, ни от величин фазовых сдвигов. Площадь (81) численно равна площади эллипса с полуосями a и b_y.

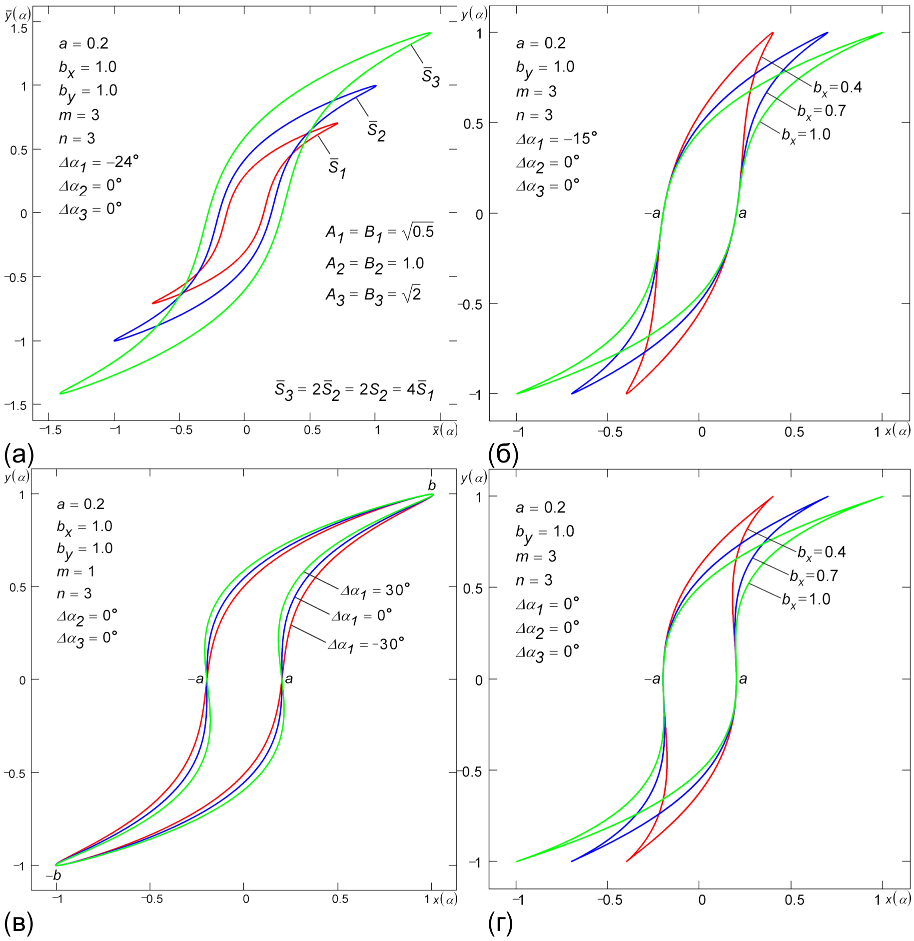


Рис. 36. Площадь петли гистерезиса (а) пропорциональна произведению масштабных коэффициентов A и B по осям x и y, соответственно, (б) одна и та же при любых насыщениях b_x (ограничивающее условие: $\Delta\alpha_2$=$\Delta\alpha_3$), (в) одна и та же при любых фазовых сдвигах $\Delta\alpha_1$ (ограничивающие условия: m=1, $\Delta\alpha_2$=$\Delta\alpha_3$), (г) одна и та же при любых насыщениях b_x.

Для вычисления площади петли, построенной по модели (1), в формулу (79) следует подставить нулевые фазовые сдвиги $\Delta\alpha_1$=$\Delta\alpha_2$=$\Delta\alpha_3$=0. В результате получаем

$$S = \frac{1}{2^{m-1}} C_m^{\frac{m-1}{2}} \pi a b_y = \frac{\pi A m_1 b_y}{\sqrt{\tan^2 \varphi_1 + 1}} = \pi A_1 b_y. \tag{82}$$

В работе 1 в формуле (27) и в сопроводительном тексте к этой формуле допущена неточность. Формула (27) даёт верный результат для любого n – чётного или нечётного. Поскольку формула (27) не даёт решение при m=1, то вместо формулы (27) следует использовать формулу (82), приведённую в настоящей работе. По той же причине вместо формулы (28) работы 1 следует использовать соответствующую формулу, приведённую в дополнительном материале.

Поскольку n не входит в формулу (82), то у всех трёх типов петель Лист, Месяц и Классическая модели (1) площадь петли S – одинаковая при условии, что остальные параметры a, b_y и m этих петель одни и те же (см. Рис. 1). Поскольку в формулу (82) параметр b_x также не входит, то все петли (1) с одинаковыми параметрами a, b_y и m, но разными b_x имеют одну и ту же площадь S (см. Рис. 36г).

По формуле (82) также вычисляется площадь гладких петель (29), наклонённых в точке расщепления на угол θ посредством перекоса системы координат.[6] Поскольку угол перекоса θ в формулу (82) не входит, то петли, наклонённые перекосом на любой угол θ, у которых параметры a, b_y и m одни и те же, имеют одну и ту же площадь S (см. Рис. 8).

Площадь Классической петли (30), наклонённой и искривлённой перекосом, вычисляется по общей формуле[6]

$$S = \frac{\pi a}{2^{m-1}} C_m^{\frac{m-1}{2}} \left\{ b_x \tan\kappa \left[1 - (m+1) \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2k+1}{m+n-2k} \right] + b_y \right\}, \tag{83}$$

где n – нечётное число. Согласно (83) площадь не зависит от угла перекоса θ, поэтому, петли, наклонённые перекосом на любой угол θ, у которых все остальные параметры одни и те же, имеют одинаковые площади (см. Рис. 9). При κ=0 (см. Рис. 8) формула (83) трансформируется в (82). В частном случае, например, при m=n=3 (см. Рис. 9) формула (83) выглядит следующим образом

$$S = \frac{3}{8} \pi a \left(b_x \tan\kappa + 2 b_y \right). \tag{84}$$

Интересно отметить, что при $\Delta\alpha_1=\Delta\alpha_2=\Delta\alpha_3=\Delta\alpha\neq 0$, где $\Delta\alpha$ – произвольное действительное число, формула (79) также приобретает вид (82). В этом случае петли, построенные согласно моделей (1) и (13), имеют одинаковые площади. Дело в том, что при указанных условиях эти петли совпадают по форме друг с другом (см. раздел II.A.2.d).

Площадь Классической петли (14), наклонённой поворотом, вычисляется по общей формуле[6]

$$S = \frac{\pi a}{2^{m-1}} C_m^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \sin\theta \left(b_x \cos\theta - b_y \sin\theta \right) \left[1 - (m+1) \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2k+1}{m+n-2k} \right] + b_y \right\}, \tag{85}$$

где n – нечётное число. Согласно (85) площади классических петель различны для углов поворота θ, имеющих противоположные знаки. При θ=0 формула (85) трансформируется в (82). В частном случае, например, при m=n=3 формула (85) выглядит следующим образом

$$S = \frac{3}{8} \pi a \left[\sin\theta \left(b_x \cos\theta - b_y \sin\theta \right) + 2 b_y \right]. \tag{86}$$

2. Кусочно-линейные и гибридные петли

Площади простейших кусочно-линейных петель, имеющих форму параллелограмма (см. Рис. 15, Рис. 19, Рис. 20, Рис. 21), проще всего определить, используя формулу площади параллелограмма (m=n=1)[6]

$$S = 4a\left[\frac{(a-b_x)\tan\gamma + b_y}{\tan\beta - \tan\gamma}\tan\beta - \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}\right]. \tag{87}$$

При отсутствии усиления (γ=0) формула (87) существенно упрощается

$$S = 4ab_y. \tag{88}$$

Поскольку площадь (88) соответствует площади параллелограмма со стороной 2a и высотой 2b_y, то по этой формуле можно определить площади кусочно-линейных петель типа Люфт и Неидеальное Реле (см. Рис. 20д, е, й, к). Поскольку гибридные петли (37) с нулевыми фазовыми сдвигами (см. Рис. 11, Рис. 17) обладают трансляционной симметрией, то их площадь равна площади параллелограмма со стороной 2a и высотой 2b_y, и поэтому также может быть найдена при помощи формулы (88).

Площадь гибридной Классической петли с усилением/ослаблением ($\gamma\neq$0) (38) (см. Рис. 18) вычисляется по следующей общей формуле[6]

$$S = 4a\left\{\left[(b_x - a)\tan\kappa - b_x\tan\gamma + b_y\right]\left[\frac{k(n-1)}{(k+1)(n+k)}\tan\theta\tan\gamma + 1\right] + (b_x - a)\left(\frac{k}{n+k}\tan\gamma - \tan\kappa\right)\right\}, \tag{89}$$

где n – нечётное число, k – чётное. При отсутствии усиления (γ=0) формула (89) обретает простой вид (88). Как следует из (88), площади гибридных петель с нулевым усилением не зависят от b_x, n, θ и κ.

Поскольку значения параметра α во всех угловых точках кусочно-линейных петель известны, то известны и декартовы координаты этих точек. Следовательно, площадь петель-многоугольников, таких как Люфт-Реле-Люфт, Люфт-Люфт, Люфт-Реле (см. Рис. 12-14, Рис. 16, Рис. 23); Люфт-Люфт-Люфт, Люфт-Реле-Люфт (см. Рис. 22); Сдвинутый Люфт, Сдвинутое Неидеальное Реле (см. Рис. 24) и других им подобных может быть вычислена по формуле площади многоугольника, заданного координатами своих вершин.

В ряде частных случаев петли-многоугольники вырождаются в такие многоугольники, которые можно представить в виде совокупности трапеций и/или параллелограммов/треугольников. Например, петлю Люфт-Реле-Люфт с Усилением на Рис. 22в можно представить в виде двух одинаковых трапеций и прямоугольника, а петлю Сдвинутый Люфт с Усилением на Рис. 24а – в виде трёх параллелограммов, два из которых одинаковые. Таким образом, для вычисления площадей подобных петель можно использовать соответствующие формулы площадей трапеций, параллелограммов, треугольников.

III. ПРИМЕНЕНИЕ УЛУЧШЕННОЙ МОДЕЛИ

С помощью разработанной модели можно строить гладкие, кусочно-линейные, гибридные, частные, зеркально-отражённые, обратные, реверсивные, двойные и тройные

Таблица. Усреднённая относительная погрешность аппроксимации $\langle\delta\rangle$ (%) исходной и улучшенной параметрических моделей петли гистерезиса.

Модель	Петля Лист, Рис. 37а	Петля Классическая, Рис. 37б	Петля Классическая, Рис. 37в
Исходная	0.8	2.9	1.7
Улучшенная	0.5	1.0	1.0

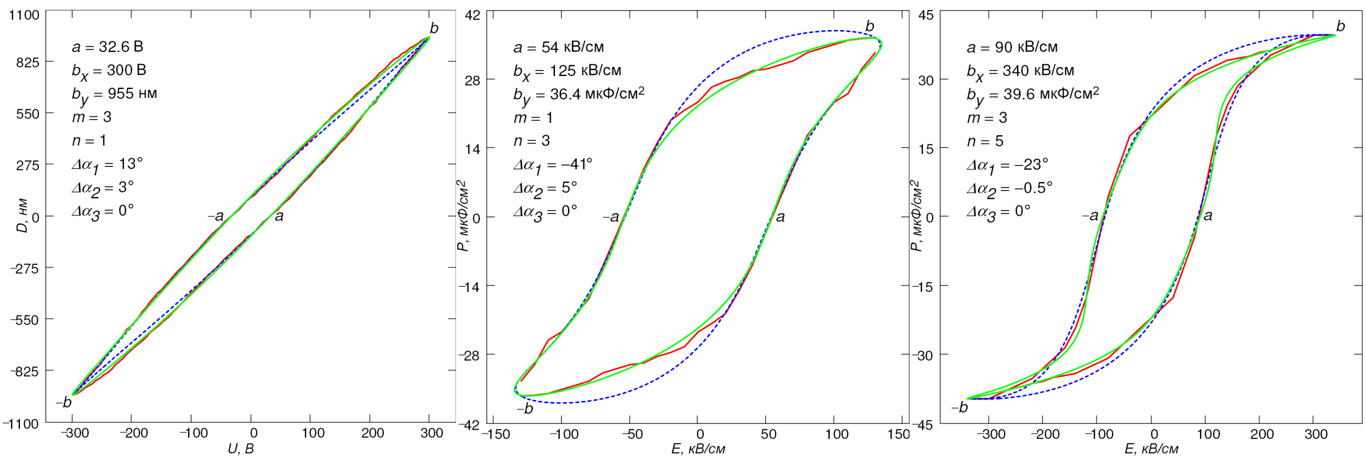
петли. Вычисление производных, нахождение гармонически линеаризованной передаточной функции гистерезисного звена и обратной функции производятся в улучшенной модели аналогично тому, как это делалось в работе 1.

Использование фазовых сдвигов $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$ и ряда других преобразований, изменяющих наклон и кривизну петель, позволяет в несколько раз уменьшить погрешность аппроксимации петель гистерезиса. Анализ погрешности, проведённый по методике, описанной в работе 1, показал, что усреднённая относительная погрешность аппроксимации

$$\langle\delta\rangle = \frac{100\%}{2nb_y}\sum_{i=1}^{n}\left|y_m(x_i) - y_e(x_i)\right| \tag{90}$$

(где $y_m(x)$ – данные модели; $y_e(x)$ – данные эксперимента; n – количество точек на восходящем или нисходящем участке экспериментальной петли) улучшенной модели не превышает 1% (см. Таблицу).[6] Для корректности сравнения при определении погрешностей использовались те же экспериментальные петли гистерезиса, что и в работе 1. На Рис. 37 показаны экспериментальные петли из работы 1, на которые наложены аппроксимирующие петли, построенные по существующей (1) и улучшенной (13) моделям. Легко видеть, что точность аппроксимации улучшенной модели заметно выше точности аппроксимации существующей модели. Для минимизации погрешности аппроксимирующую петлю рекомендуется проводить, используя метод наименьших квадратов.[31]

Также как и исходная модель, улучшенная модель применима для исправления искажений, вносимых гистерезисом пьезоманипуляторов (см. Рис. 37а) сканирующего зондо-



(а) (б) (в)

Рис. 37. Аппроксимация реальных гладких петель гистерезиса типа (а) Лист, (б), (в) Классическая. Красная негладкая петля – экспериментальная, синяя пунктирная петля – существующая модель, зелёная гладкая петля – предложенная улучшенная модель. Погрешность аппроксимации $\langle\delta\rangle$ улучшенной модели не превышает 1%.

вого микроскопа (СЗМ). Для этого в уже имеющиеся аппаратные схемы, предложенные в работе 1, нужно добавить фазосдвигающие элементы, задающие фазовые сдвиги $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$ (или $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_3$).

Вместо аппаратного возведения в степени m и n синусоидального сигнала с помощью умножителей, как это было предложено в работе 1, можно согласно (3) просто суммировать синусоидальные и косинусоидальные сигналы с кратными частотами. Например, для компенсации искажений, вызываемых петлёй гистерезиса Лист (m=3, n=1), показанной на Рис. 37а, потребуется два косинусоидальных сигнала с частотами ω и 3ω, элемент, сдвигающий фазу на четверть периода, три усилителя с коэффициентами усиления $3/4a$, $a/4$, b_x и два суммирующих усилителя.[6]

Согласно (7) для компенсации искажений петли Лист потребуется два косинусоидальных сигнала с частотами ω и 3ω, элемент, сдвигающий фазу на величину φ_1=arctan($4b_x/3a$), два усилителя с коэффициентами усиления $Am_1=\sqrt{9a^2/16+b_x^2}$, $Am_3=a/4$ и суммирующий усилитель.[6]

IV. РЕЗЮМЕ

Выполнена доработка существующей модели петли гистерезиса, построенной на параметрических уравнениях; уточнено несколько формул, полученных ранее. В результате доработки в несколько раз увеличена точность аппроксимации. Показано, что порождающую функцию петли гистерезиса можно представить в виде суммы нерасщеплённой петли и кривой расщепления, в виде частотного спектра и в экспоненциальном виде.

Выведена общая формула, с помощью которой можно строить кусочно-линейные петли гистерезиса типа Люфт и Неидеальное Реле, а также их многочисленные разновидности, широко используемые при построении упрощённых моделей гистерезисных явлений. Продемонстрирована возможность образования/декомпозиции различных петель гистерезиса. Для ряда типов петель результаты образования/декомпозиции дают основание предположить одновременное существование в рассматриваемой системе не одного, а двух различных гистерезисных процессов, наложенных друг на друга. Получено несколько новых формул, описывающих различные виды одинарных, двойных и тройных петель.

Помимо представленных параметрических уравнений параллелограмма и прямоугольника, найдены параметрические уравнения ромба, квадрата, правильного шестиугольника и правильного восьмиугольника.[6] Предложено более общее выражение для вычисления площади петли гистерезиса, служащей для оценки потерь энергии в пьезоэлектрике/ферромагнетике. В ходе исследования обнаружено несколько тождеств, связывающих биномиальные коэффициенты.[6]

Разработанная модель петли гистерезиса особенно удобна при решении задач имитационного моделирования циклически работающих приборов, включающих в себя звенья с гистерезисом.[32] Кроме того, модель позволяет простыми аппаратными средствами сформировать выходные сигналы $x(t)$, $y(t)$, обеспечивая таким образом лёгкую аппаратную реализацию как прямых, так и обратных петель гистерезиса.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

Дополнительный материал включает zip-архив рабочих листов Маткада 2001i, в которых детально рассмотрены все аспекты исходной и улучшенной параметрических моделей петли гистерезиса. Те, у кого нет программы Маткад, могут воспользоваться читаемыми рабочими листами Маткада в виде PDF-документа, который прилагается. Из-за ограничения на размер статьи в ней представлены только наиболее часто встречающиеся на практике петли гистерезиса. Если требуемая петля отсутствует в статье, то её поиск стоит продолжить в дополнительном материале.

Работа выполнена при финансовой поддержке “Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере” (соглашение № 3ГТС1/48805). Автор выражает благодарность О. Э. Ляпину, D. W. Waddell, О. В. Объедкову и Л. Б. Шаровой за критическое прочтение рукописи и проверку дополнительных материалов, доц. Е. А. Фетисову за поддержку и стимулирование работы.

Литература

[1] R. V. Lapshin, Analytical model for the approximation of hysteresis loop and its application to the scanning tunneling microscope, Review of Scientific Instruments, vol. 66, no. 9, pp. 4718-4730, 1995 (www.niifp.ru/staff/lapshin/#articles).

[2] B. Mokaberi, A. A. G. Requicha, Compensation of scanner creep and hysteresis for AFM nanomanipulation, IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, vol. 5, iss. 2, pp. 197-206, 2008.

[3] B. Graffel, F. Müller, A.-D. Müller, M. Hietschold, Feedforward correction of nonlinearities in piezoelectric scanner constructions and its experimental verification, Review of Scientific Instruments, vol. 78, no. 053706, 6 pp., 2007.

[4] V. Hassani, T. Tjahjowidodo, T. N. Do, A survey on hysteresis modeling, identification and control, Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 49, pp. 209-233, 2014.

[5] Р. В. Лапшин, Улучшенная аппроксимирующая модель петли гистерезиса для линеаризации пьезосканера зондового микроскопа, XIX Российский симпозиум по растровой электронной микроскопии и аналитическим методам исследования твёрдых тел (РЭМ-2015), стр. 154-155, Черноголовка, 1-4 июня, 2015 (www.niifp.ru/staff/lapshin/#reports).

[6] См. дополнительный материал Р. В. Лапшин, “Петля гистерезиса”, Рабочие листы Маткада, версия-дата 01.03.2020 или его читаемую копию Р. В. Лапшин, “Петля гистерезиса”, Читаемые рабочие листы Маткада, 3533 стр., 2020 (последние версии этих документов доступны для

загрузки с сайта www.niifp.ru/staff/lapshin/#downloads), в котором содержатся определения, полные доказательства, поясняющие графики и комментарии ко всем обсуждаемым в статье аспектам исходной и улучшенной моделей петли гистерезиса.

[7] P. Simeão Carvalho, P. Cluzeau, C. Destrade, H. T. Nguyen, M. R. Chaves, Identification of ferroelectric and antiferroelectric phases by the study of polarization hysteresis loops, Ferroelectrics, vol. 178, pp. 195-204, 1996.

[8] Y. Shimizu, K. Matsuda, M. Mizutani, K. Nishimura, T. Kawabata, S. Ikeno, Y. Hishinuma, S. Aoyama, Superconducting properties of MgB_2 particle impregnated with Mg-based alloys, Materials Transactions, vol. 52, no. 3, pp. 272-275, 2011.

[9] A. G. Joshi, C. G. S. Pillai, P. Raj, S. K. Malik, Magnetization studies on superconducting MgB_2 – lower and upper critical fields and critical current density, Solid State Communications, vol. 118, iss. 9, pp. 445-448, 2001.

[10] G. C. Sih, D. Y. Jeong, Hysteresis loops predicted by isoenergy density theory for polycrystals. Part II: cyclic heating and cooling effects predicted from non-equilibrium theory for 6061-T6 aluminum, SAE 4340 steel and Ti-8Al-1Mo-1V titanium cylindrical bars, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, vol. 41, pp. 267-289, 2004.

[11] A. V. Bune, C. Zhu, S. Ducharme, L. M. Blinov, V. M. Fridkin, S. P. Palto, N. G. Petukhova, S. G. Yudin, Piezoelectric and pyroelectric properties of ferroelectric Langmuir-Blodgett polymer films, Journal of Applied Physics, vol. 85, no. 11, pp. 7869-7873, 1999.

[12] N. Balke, S. Jesse, Q. Li, P. Maksymovych, M. B. Okatan, E. Strelcov, A. Tselev, S. V. Kalinin, Current and surface charge modified hysteresis loops in ferroelectric thin films, Journal of Applied Physics, vol. 118, no. 072013, 8 pp., 2015.

[13] S.-H. Baek, C. M. Folkman, J.-W. Park, S. Lee, C.-W. Bark, T. Tybell, C.-B. Eom, The nature of polarization fatigue in $BiFeO_3$, Advanced Materials, vol. 23, pp. 1621-1625, 2011.

[14] R. Lavrijsen, A. Fernández-Pacheco, D. Petit, R. Mansell, J. H. Lee, R. P. Cowburn, Tuning the interlayer exchange coupling between single perpendicularly magnetized CoFeB layers, Applied Physics Letters, vol. 100, no. 052411, 5 pp., 2012.

[15] F. Chinni, F. Spizzo, F. Montoncello, V. Mattarello, C. Maurizio, G. Mattei, L. Del Bianco, Magnetic hysteresis in nanocomposite films consisting of a ferromagnetic AuCo alloy and ultrafine Co particles, Materials, vol. 10, iss. 7, pp. 717-732, 2017.

[16] D. Meyerhofer, Transition to the ferroelectric state in barium titanate, Physical Review, vol. 112, no. 2, pp. 413-423, 1958.

[17] H. Jeen, A. Biswas, Single domain to multidomain transition due to in-plane magnetic anisotropy in phase-separated $(La_{0.4}Pr_{0.6})_{0.67}Ca_{0.33}MnO_3$ thin films, Physical Review B, vol. 83, no. 064408, 8 pp., 2011.

[18] S. Corodeanu, H. Chiriac, A. Damian, N. Lupu, T.-A. Óvári, Field and current controlled domain wall propagation in twisted glass-coated magnetic microwires, Scientific Reports, vol. 9, no. 5868, 8 pp., 2019.

[19] Z. Y. Liu, L. Yue, D. J. Keavney, S. Adenwalla, Oscillatory interlayer exchange coupling in $[Pt/Co]_n/NiO/[Co/Pt]_n$ multilayers with perpendicular anisotropy: Dependence on NiO and Pt layer thicknesses, Physical Review B, vol. 70, no. 224423, pp. 1-10, 2004.

[20] D. H. Kim, J. S. Yang, K. W. Lee, S. D. Bu, D.-W. Kim, T. W. Noh, S.-J. Oh, Y.-W. Kim, J.-S. Chung, H. Tanaka, H. Y. Lee, T. Kawai, J. Y. Won, S. H. Park, J. C. Lee, Investigations on the nature of observed ferromagnetism and possible spin polarization in Co-doped anatase TiO_2 thin films, Journal of Applied Physics, vol. 93, no. 10, pp. 6125-6132, 2003.

[21] L. C. Sampaio, E. H. C. P. Sinnecker, G. R. C. Cernicchiaro, M. Knobel, M. Vázquez, J. Velázquez, Magnetic microwires as macrospins in a long-range dipole-dipole interaction, Physical Review B, vol. 61, no. 13, pp. 8976-8983, 2000.

[22] R. Sbiaa, I. A. Al-Omari, P. R. Kharel, M. Ranjbar, D. J. Sellmyer, J. Åkerman, S. N. Piramanayagam, Temperature effect on exchange coupling and magnetization reversal in antiferromagnetically coupled (Co/Pd) multilayers, Journal of Applied Physics, vol. 118, no. 063902, 5 pp., 2015.

[23] N. Yasuda, M. Okamoto, H. Shimizu, S. Fujimoto, K. Yoshino, Y. Inuishi, Pressure-induced antiferroelectricity in ferroelectric CsH_2PO_4, Physical Review Letters, vol. 41, no. 19, pp. 1311-1314, 1978.

[24] S. E. Young, J. Y. Zhang, W. Hong, X. Tan, Mechanical self-confinement to enhance energy storage density of antiferroelectric capacitors, Journal of Applied Physics, vol. 113, no. 054101, 6 pp., 2013.

[25] S. Sawada, T. Yamaguchi, H. Suzuki, F. Shimizu, Experimental studies on phase transitions in ferroelectric $\{N(CH_3)_4\}_2ZnCl_4$, Journal of the Physical Society of Japan, vol. 54, no. 8, pp. 3129-3135, 1985.

[26] E. Sawaguchi, M. L. Charters, Aging and the double hysteresis loop of $Pb_\lambda Ca_{1-\lambda}TiO_3$ ceramics, Journal of the American Ceramic Society, vol. 42, no. 4, pp. 157-164, 1959.

[27] R. Tremblay, M. Lacerte, C. Christopoulos, Seismic response of multistory buildings with self-centering energy dissipative steel braces, Journal of Structural Engineering, vol. 134, pp. 108-120, 2008.

[28] G. Li, S. Dhamala, H. Li, J.-S. Liu, W. Chen, Characterization of barrier-tunable radio-frequency-SQUID for Maxwell's demon experiment, Chinese Physics B, vol. 27, no. 068501, 6 pp., 2018.

[29] H. Khanduri, M. C. Dimri, H. Kooskora, I. Heinmaa, G. Viola, H. Ning, M. J. Reece, J. Krustok, R. Stern, Structural, dielectric, magnetic, and nuclear magnetic resonance studies of multiferroic Y-type hexaferrites, Journal of Applied Physics, vol. 112, no. 073903, 7 pp., 2012.

[30] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Table of integrals, series, and products, 1171 pp., 7th edition, Edited by A. Jeffrey, D. Zwillinger, Academic Press, 2007.

[31] F. Yang, A. M. Parkhurst, Efficient estimation of elliptical hysteresis with application to the characterization of heat stress, Journal of Agricultural, Biological, and Environmental Statistics, vol. 20, iss. 3, pp. 371-388, 2015.

[32] S. A. Agafonov, V. A. Matveev, Dynamics of a balanced rotor under the action of an elastic force with a hysteresis characteristic, Mechanics of Solids, vol. 47, no. 2, pp. 160-166, 2012.

